

# مقاومت مصالح ۲

آموزشکده فنی شهید جباریان

مدرس: سمیرا اردکانی

گروه مکانیک

## سر فصل ها

فصل اول: تبدیل های تنش و کرنش

فصل دوم: خیز در تیرها

فصل سوم: روش های انرژی

# فصل اول:

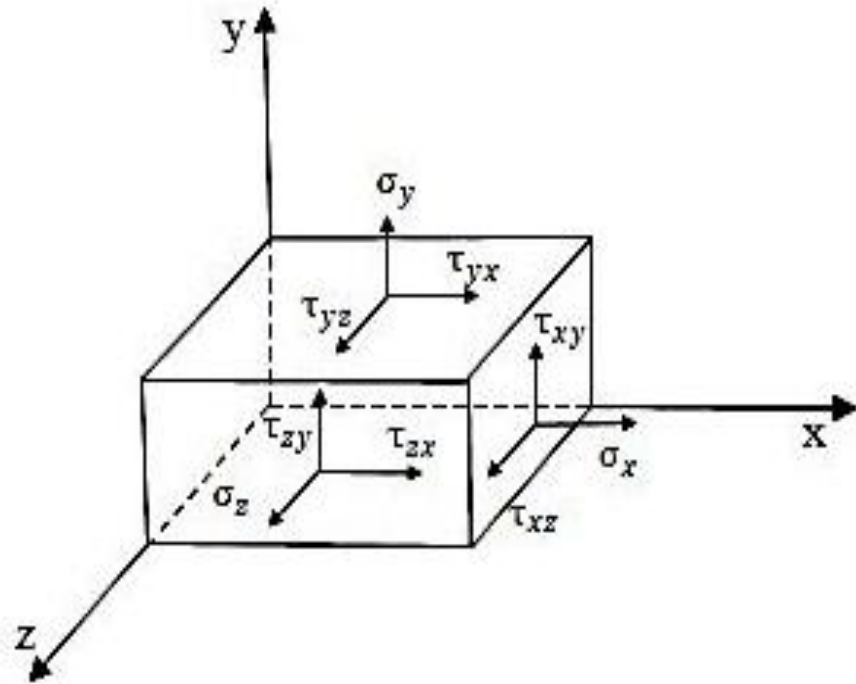
## تبدیلهای تنش و کرنش

## مقدمه

با استفاده از مطالب بیان شده در درس مقاومت مصالح دوره کاردانی می‌توانیم تنش‌ها و کرنش‌ها را در نقاط دلخواه از اجسام تحت بارگذاری، بدست آورده و سازه‌ها را از لحاظ تنش و کرنش و الزامات طراحی مورد بررسی قرار دهیم. حال باید به این نکته توجه نمود زمانی که جسمی تحت انواع تنش‌های نرمال و برشی قرار می‌گیرد، چطور می‌توان این تنش‌ها را با یکدیگر ترکیب نموده و تحت عنوان یک مقدار خاص، در طراحی لحاظ نموده و یا حتی اینکه چگونه می‌توان این تنش‌ها و کرنش‌ها را در صفحات دلخواه با هر زاویه‌ی دلخواه بدست آورده و از آن‌ها بهره‌برداری نمود. این موارد از جمله نکات کلیدی در بحث تحلیل سازه‌ها بوده و همواره یکی از دغدغه‌های اصلی طراحان به شمار می‌آید که در این فصل به تفصیل به چگونگی تبدیل تنش‌ها و کرنش‌ها در زوایای مختلف و همچنین چگونگی ترکیب تنش‌ها و کرنش‌ها می‌پردازیم.

## ۱-۱- حالت تنش مسطح ( تنش صفحه‌ای )

جسمی را تحت انواع بارگذاری‌های کششی، فشاری، برشی، خمشی و ... مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. هر المان از این جسم همواره تحت تنش قرار گرفته و تانسور تنش در این المان در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌گردد:



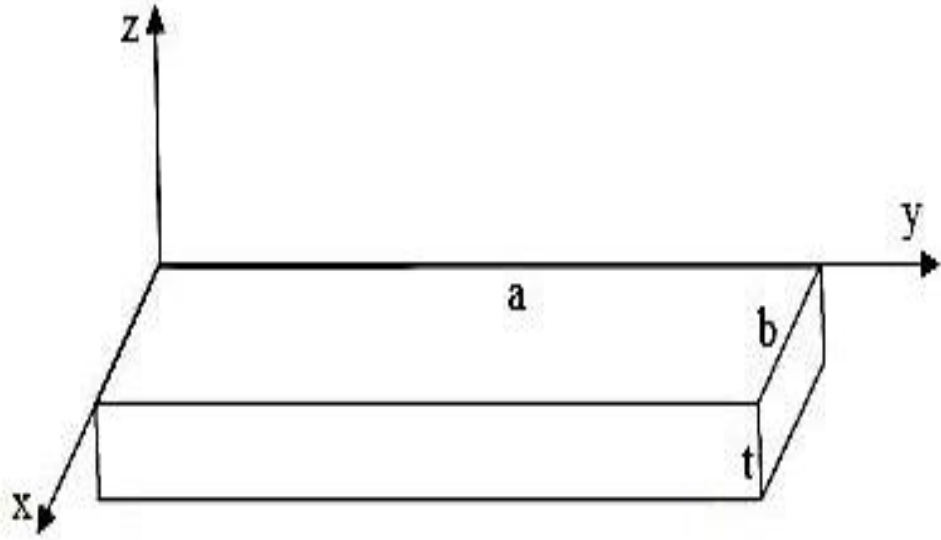
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

شکل ۱-۱

که در رابطه ۱-۱،  $\sigma$  تنش های نرمال و  $\tau$  تنش های برشی می باشند و همچنین لازم به ذکر است که تانسور تنش در حالت کلی نسبت به قطر اصلی متقارن می باشد یعنی همواره داریم:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases} \quad (۱-۲)$$

تنش صفحه‌ای، حالتی از تنش بوده که در آن به علت ناچیز بودن یک بعد از جسم در مقایسه با دو بعد دیگر آن، از مقدار تنش در جهت بعد کوچکتر در مقایسه با دو بُعد دیگر صرفنظر می‌شود که به عنوان مثال عملی از این مورد می‌توان به مخازن تحت فشار جدار نازک اشاره نمود.



شکل (۱-۲)

if  $a < b, \frac{t}{a} < \frac{1}{10}$  or  $\frac{t}{b} < \frac{1}{20} \Rightarrow$  plane stress  $\Rightarrow$

(۱-۳)

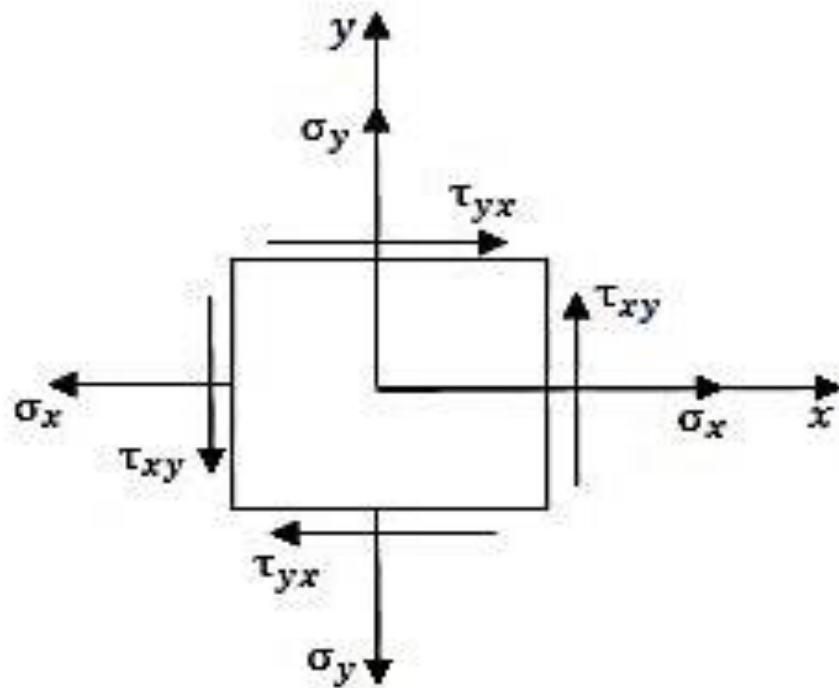
$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \gamma_{zy} = \sigma_{zx} = 0$$

لازم به ذکر است که در این حالت با وجود  $\sigma_z = 0$  ولی  $\epsilon_z \neq 0$  ، چرا که طبق قانون هوک داریم:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \Rightarrow \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

(۱-۴)

پس در این حالت خاص، المان کلی تنش نشان داده شده در شکل (۱-۱)، به صورت زیر در می آید (جهت تنش های نرمال و برشی نشان داده شده در شکل (۱-۳) فرضی بوده و می توانند معکوس باشند).



شکل (۱-۳)

در این حالت  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  تنش های وارده به المان بوده که مشخص می گردند.



## ۲-۱- تبدیل تنش

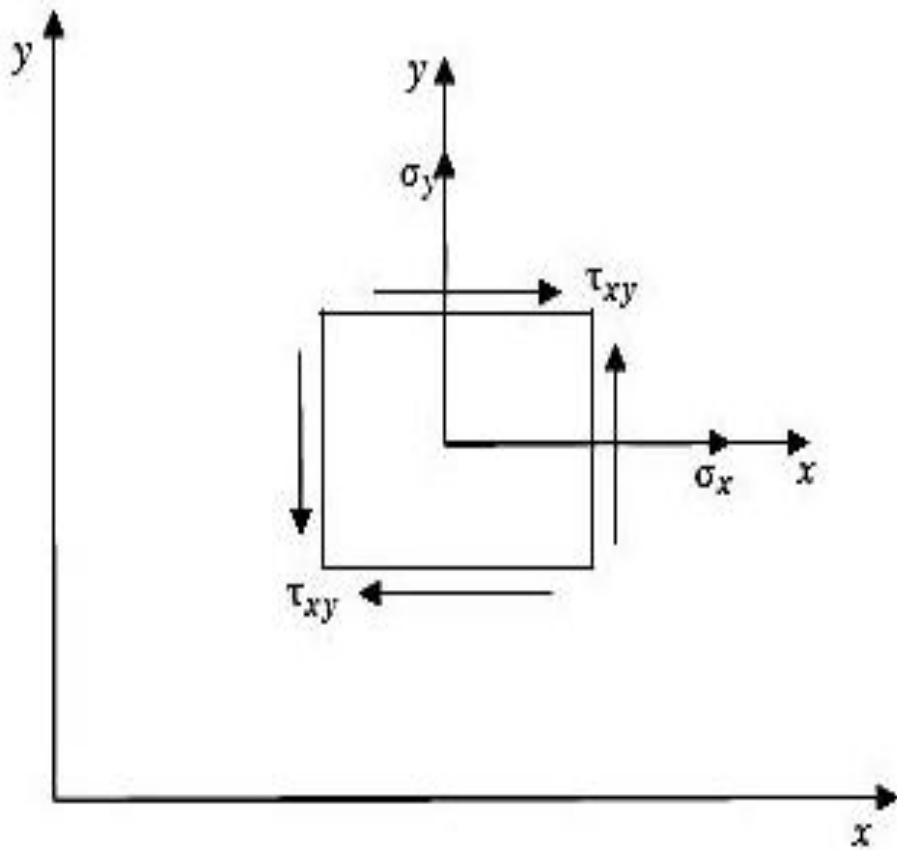
حال به سراغ این موضوع می‌رویم که اگر صفحات مختصات به اندازه  $\theta$  دوران داشته باشند، چطور میتوان

تنش‌های حالت جدید را با استفاده از تنش‌های حالت اولیه تعیین نمود، یعنی فرض کنید مطابق شکل

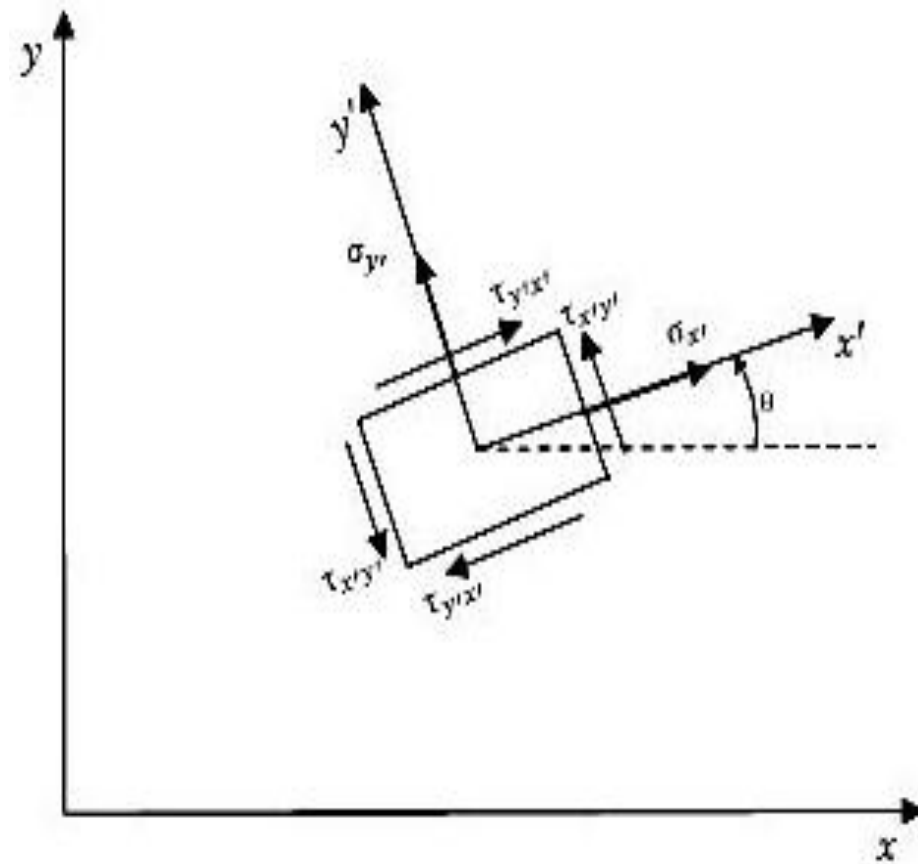
(۴-۱)، تنش در دستگاه مختصات  $x-y$  مشخص باشند و در ادامه محورهای مختصات به اندازه  $\theta$  (پاد

ساعتگرد) دوران نمایند (شکل ۵-۱) و به حالت  $x'-y'$  تبدیل شوند.

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \theta \end{cases} \text{ (معلوم)} \longrightarrow \begin{cases} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{cases} \text{ (مجهول)} \quad (1-5)$$

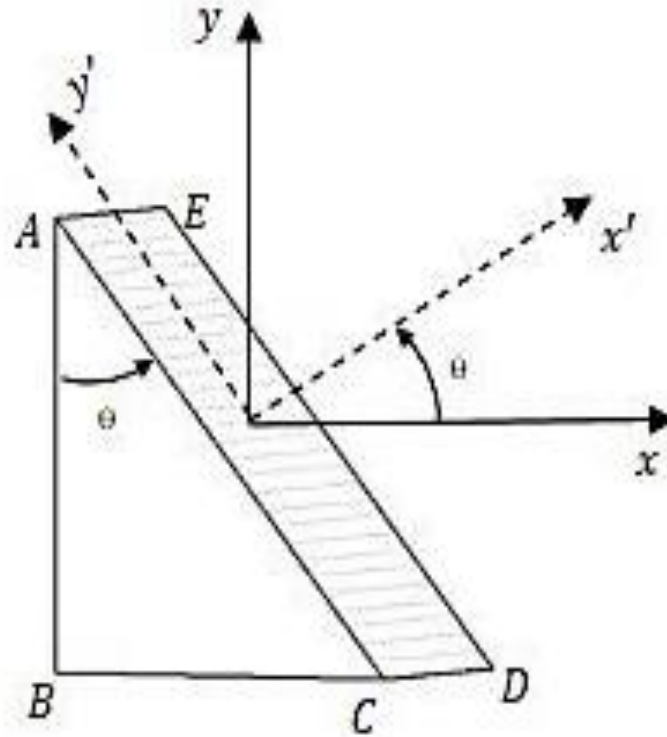


شکل (۴-۱)



شکل (۵-۱)

به منظور دستیابی به این هدف، المان مورد نظر را توسط صفحه ای دلخواه که با محور  $y$  ها زاویه  $\theta$  را می سازد، مطابق با شکل (۶-۱) برش می زنیم:

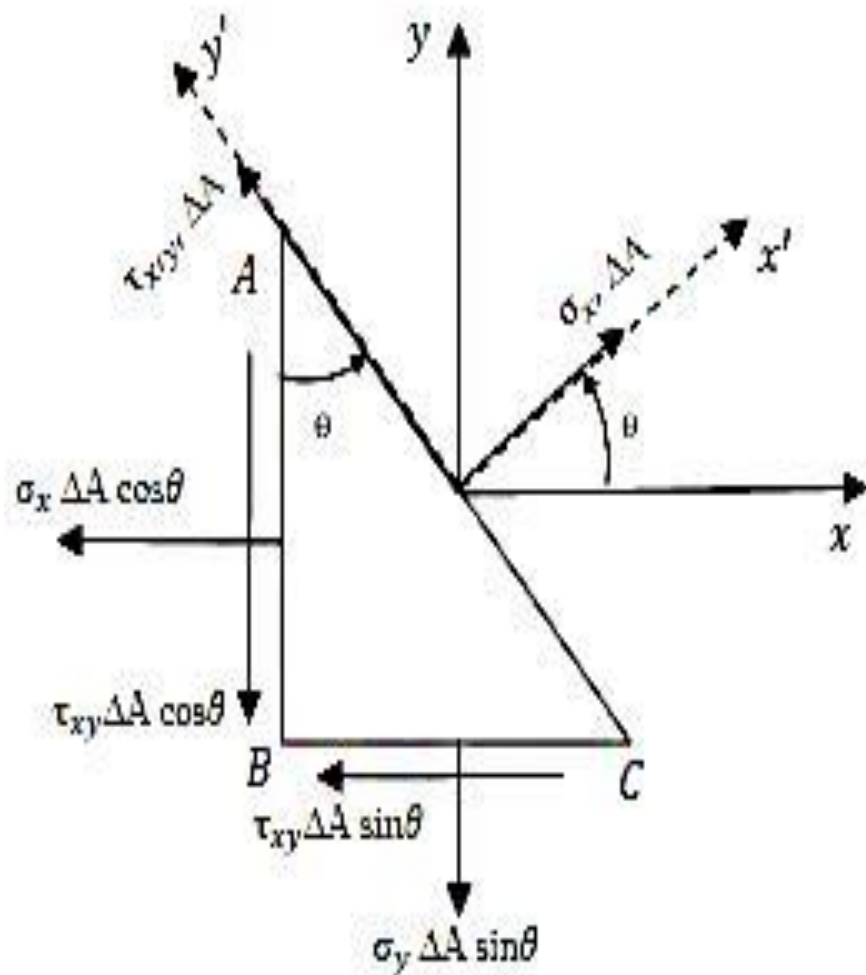


شکل (۱-۶)

با توجه به شکل فوق، چنانچه مساحت سطح برش خورده  $ABCD$  را  $\Delta A$  فرض نماییم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_{BC} = \Delta A \sin \theta \\ S_{AB} = \Delta A \cos \theta \end{cases} \quad (1-6)$$

در ادامه، نیروهای وارد به هر وجه المان را با توجه به تنش‌های اعمالی، ترسیم نموده و خواهیم داشت:



شکل (۷-۱)

حال معادلات تعادل را برای المان برش خورده مطابق با شکل ۷-۱ اعمال نموده و خواهیم داشت :

$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1-7)$$

$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (1-8)$$

و با تبدیل  $\theta$  به  $\frac{\pi}{2} + \theta$  در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1-9)$$

که در واقع روابط ۷-۱ و ۸-۱ و ۹-۱ روابط تبدیل تنش ها از دستگاه مختصات  $x-y$  به دستگاه

مختصات  $x'-y'$  می باشند. این روابط را می توانیم به شکل زیر نیز نمایش دهیم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

در رابطه بالا،  $m = \cos \theta$  و  $n = \sin \theta$  می باشد.

قرارداد: در تمامی روابط فوق، هرگاه چرخش المان پادساعتگرد باشد، مثبت و در حالت ساعتگرد، منفی می باشد و نیز تنش های کششی مثبت و تنشهای فشاری منفی می باشند و تنش برشی نیز زمانی که تمایل به چرخش المان در جهت پادساعتگرد داشته باشد، مثبت لحاظ می گردد.

### ۳-۱- تنش ها و جهات اصلی

با توجه به آن چه که تا کنون مطرح گردید، با معلوم بودن مولفه های تنش در یک نقطه می توان مقادیر تنش را در هر صفحه دلخواهی که از آن نقطه می گذرد در هر زاویه دلخواه به دست آورد. از آنجا که در مسائل طراحی، مشخص کردن صفحه ای که مقادیر تنش در آن ماکزیمم یا مینیمم باشد، نکته بسیار مهمی به شمار می آید، در این قسمت به محاسبه تنش های ماکزیمم و مینیمم و صفحات آنها پرداخته می شود.

جهت اصلی متناظر با تنش های نرمال اصلی در واقع جهاتی ( صفحاتی عمود بر هم) هستند که در آنها تنش برشی همواره صفر بوده و تنش های نرمال در آن یکی ماکزیمم و یکی مینیمم می باشد که به این تنشها، تنش های اصلی گفته می شود و آنها را با  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  نشان داده و همواره فرض بر آنست که  $\sigma_1 < \sigma_2$  می باشد.

با انجام عملیات ریاضی، تنشهای اصلی و زوایای متناظر با آنها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \theta_{P1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \\ \theta_{P2} = \theta_{P1} + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1-11)$$

و مقادیر تنش‌های اصلی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2} \quad (1-12)$$



نکته: همانطور که بیان گردید در جهات اصلی تنش‌های نرمال، تنش برشی همواره صفر می‌باشد. این موضوع را می‌توان از قرار دادن نسبت‌های مثلثاتی  $(2\theta)_{P_1}$  و  $(2\theta)_{P_2}$  در رابطه (۸-۱) اثبات کرد.

#### ۴-۱- تنش‌های برشی ماکزیمم و مینیمم و جهات آنها

همان‌گونه که تنش‌های نرمال اصلی و صفحات آنها در طراحی اهمیت بسزایی دارند، تنش‌های برشی و صفحات رخداد آنها نیز همواره مورد توجه طراحان بوده است. به همین دلیل در ادامه به محاسبه تنش‌های برشی ماکزیمم و مینیمم و نیز صفحات رخداد آنها پرداخته می‌شود.

با انجام عملیات ریاضی، تنشهای برشی ماکزیمم و مینیمم و زوایای متناظر با آنها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \theta_{S1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \right) \\ \theta_{S2} = \theta_{S1} + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1-13)$$

و مقادیر تنش برشی ماکزیمم و مینیمم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\tau_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2} \quad (1-14)$$

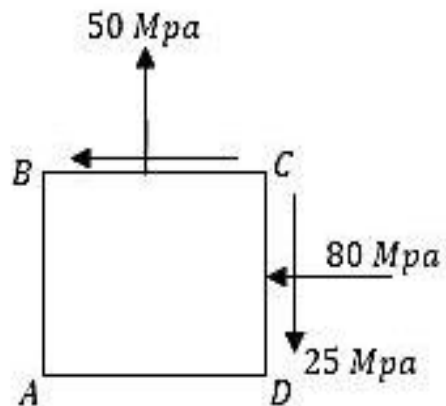
**نکته:** در نقطه ای که تنش برشی ماکزیمم یا مینیمم باشد، تنش نرمال صفر نبوده و از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_{ave} \quad (1-15)$$

**تمرین ۱:** رابطه (۱-۱۵) را اثبات کنید.

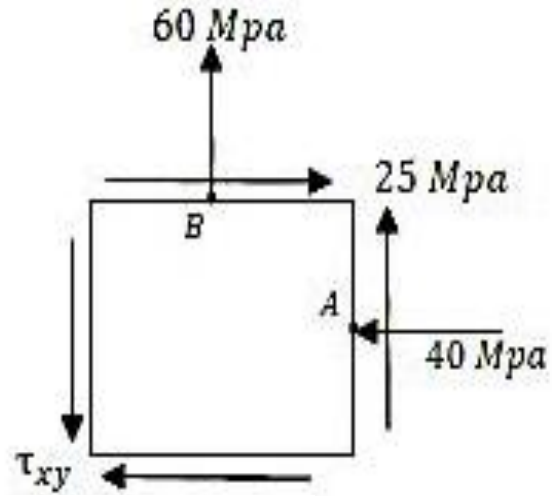
**تمرین ۲:** در وضعیت تنش صفحه‌ای، در نقطه‌ای از جسم مقادیر تنش‌های وارده مطابق با شکل زیر

می‌باشد. مطلوبست محاسبه مقادیر تنش‌های وارد بر المانی که در نقطه مزبور  $30^\circ$  درجه در جهت



عقربه‌های ساعت دوران نموده است.

تمرین ۳: برای المان نشان داده شده در شکل زیر، مطلوبست:

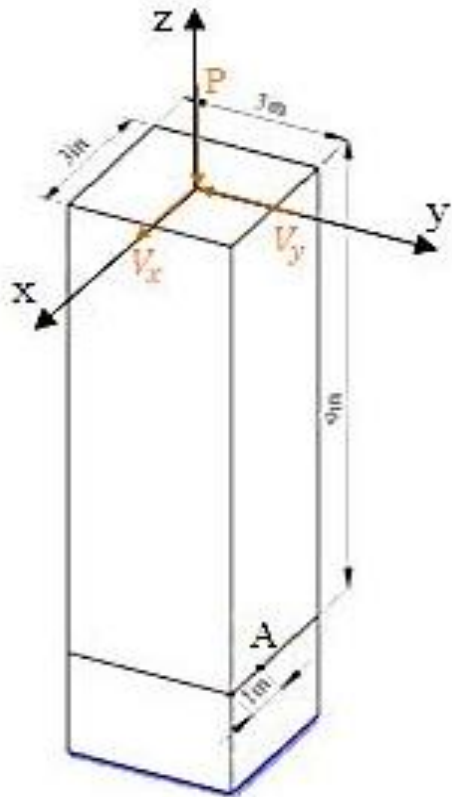


الف) صفحات اصلی

ب) تنش‌های اصلی

ج) صفحات تنش برشی ماکزیمم و مینیمم

د) تنش برشی ماکزیمم و مینیمم



تمرین ۴: جسمی تحت باگذاری‌های نشان داده شده قرار گرفته است، مطلوبست:

الف) تنش‌های اصلی و جهات آن‌ها در نقطه A

ب) تنش‌های برشی ماکزیمم و مینیمم و جهات آن‌ها در نقطه A

ج) ترسیم المان تنش در نقطه A

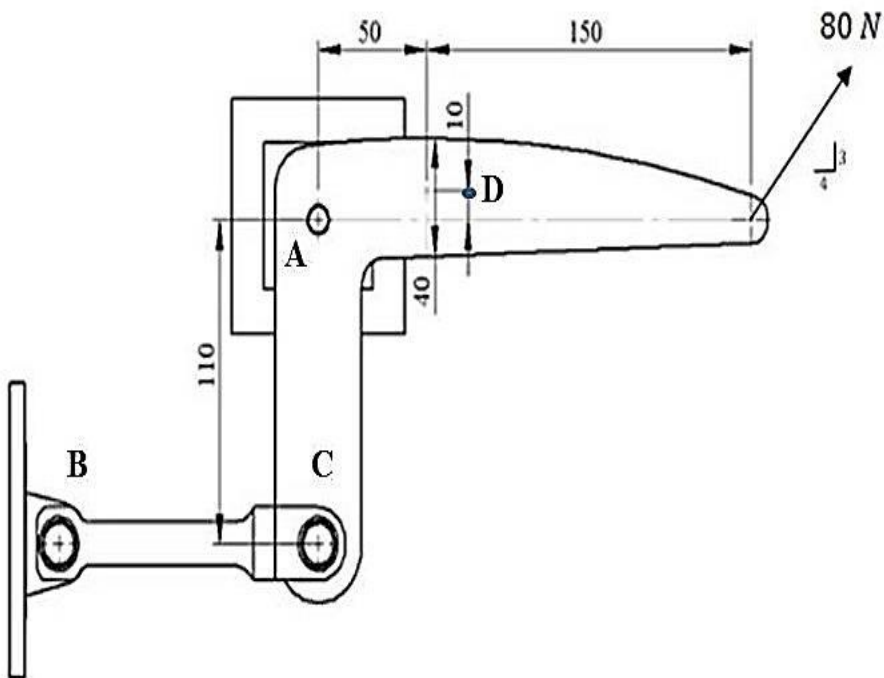
$$\begin{cases} p = 900 \text{ lb} \\ V_x = 400 \text{ lb} \\ V_y = 500 \text{ lb} \end{cases}$$

**تمرین ۵:** اهرم نشان داده شده در شکل زیر، در نقطه‌ی  $A$  پین شده و در نقطه‌ی  $B$  توسط عضو  $BC$  مهار شده است. فرض کنید اهرم از جنس  $AL$  بوده و ضخامت آن  $20 \text{ mm}$  می‌باشد. اگر اهرم تحت نیروی  $80 \text{ N}$  قرار بگیرد، مطلوبست:

الف) تنش‌های اصلی و جهات آن‌ها در نقطه  $D$ .

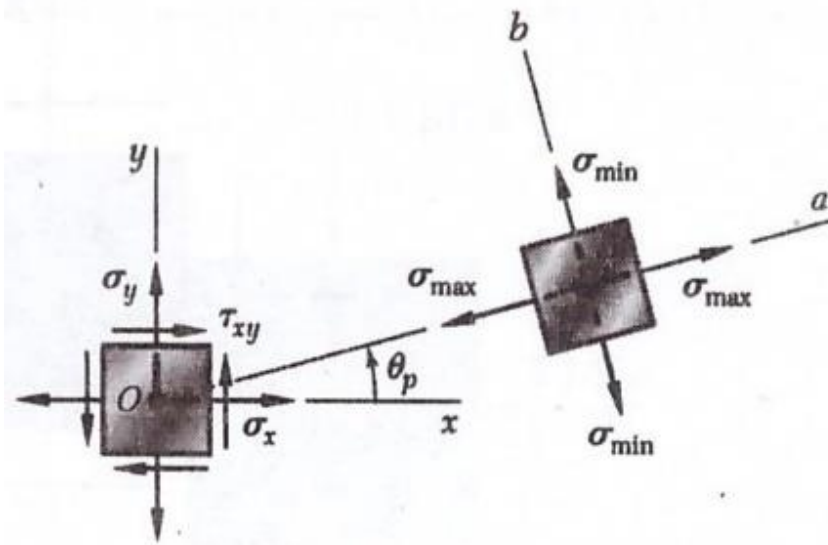
ب) تنش‌های برشی ماکزیمم و مینیمم و جهات آن‌ها در نقطه  $D$ .

ج) ترسیم آن‌ها.



## ۵-۱-دایره موهر

برای بدست آوردن مقادیری که در فوق به روش تحلیلی بدست آمد  $(\theta_{s2}, \theta_{s1}, \tau_{\min}, \tau_{\max}, \theta_{p2}, \theta_{p1}, \sigma_2, \sigma_1)$  یک روش ترسیمی نیز وجود دارد که به دایره موهر معروف می‌باشد که از نام پیشنهاد دهنده آلمانی به نام موهر گرفته شده است. در دایره موهر، محور افقی معرف تنش قائم و محور عمودی بیانگر تنش برشی می‌باشد و برای ترسیم دایره موهر بایستی به ترتیب گام‌های زیر را طی نموده و به نتیجه نهایی رسید. بدین منظور فرض نمایید المانی مطابق شکل زیر داده شده است:



شکل (۱-۸)

## مراحل رسم دایره موهر:

گام اول: با توجه به المان داده شده، مختصات نقاط  $X$  و  $Y$  را مطابق با شکل قبل در نظر می‌گیریم.

\*مختصات نقاط  $X$  (وجه راست المان) و  $Y$  (وجه بالایی المان) به صورت زیر مشخص می‌گردد:

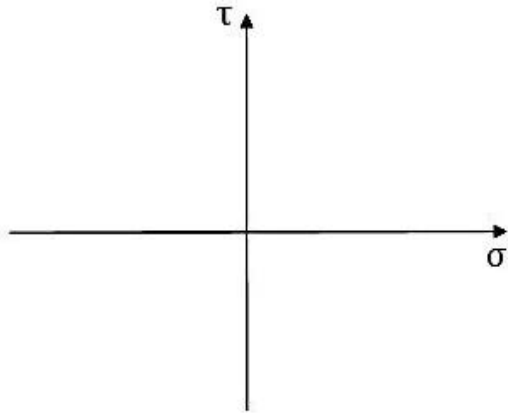
$$X \left| \begin{array}{l} \text{تنش نرمال} \\ x = \\ \text{تنش برشی} \\ y = \end{array} \right. \qquad Y \left| \begin{array}{l} \text{تنش نرمال} \\ x = \\ \text{تنش برشی} \\ y = \end{array} \right.$$

\*\*برای مختصات  $X$  در نقاط  $X$  و  $Y$ ، تعیین علامت بایستی به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma > 0 \rightarrow \text{کششی} \\ \sigma < 0 \rightarrow \text{فشاری} \end{array} \right.$$

\*\*\*برای مختصات  $Y$  در نقاط  $X$  و  $Y$  نیز فقط مقدار تنش بدون علامت در نظر گرفته شده و بایستی ساعتگرد و پادساعتگرد بودن آن مشخص گردد.

گام دوم: محور مختصات  $(\sigma - \tau)$  را ترسیم نموده و نقاط  $X$  و  $Y$  بدست آمده در گام اول را در آن مشخص می‌کنیم. توجه نمایید که محور افقی تنش نرمال و محور عمودی تنش برشی می‌باشد.



شکل (۹-۱)

\* همواره بایستی به این موضوع توجه شود که جهت مثبت محور عمودی، ساعتگرد می‌باشد و این بدان معناست که از نقاط  $X$  و  $Y$  هر کدام دارای مولفه  $\gamma$  پادساعتگرد باشند، باید در زیر محور افقی قرار داده شوند.

گام سوم: نقاط  $X$  و  $Y$  را با یک خط به یکدیگر وصل نموده و محل برخورد خط  $XY$  با محور افقی  $\sigma$  را نقطه  $C$  می‌نامیم که این همان مرکز دایره موهر می‌باشد.



گام چهارم: به مرکز C و شعاع YC یا XC، یک دایره ترسیم نموده که همان دایره موهر می باشد.

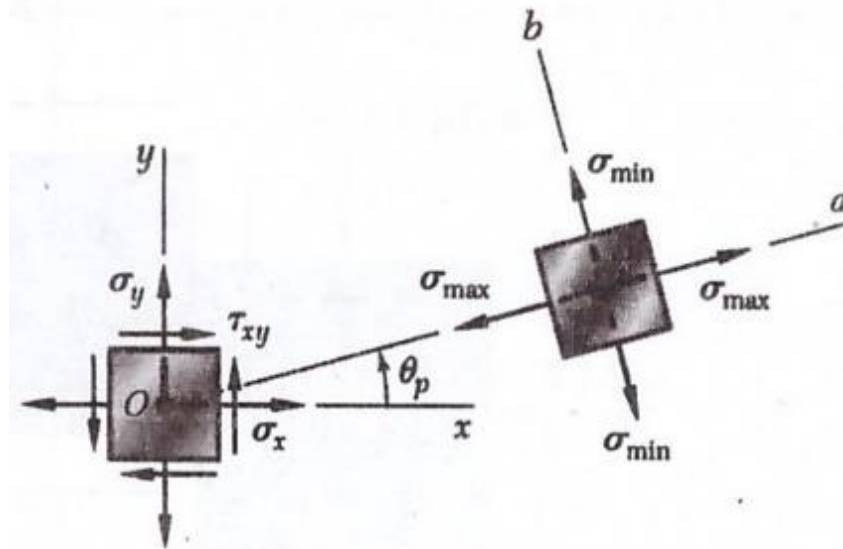
گام پنجم: محل برخورد دایره با محور افقی همان تنش های اصلی  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  می باشند.

گام ششم: فاصله نقطه C از محور عمودی، همان  $\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  می باشد.

گام هفتم: قطر عمودی گذرنده از C را ترسیم نموده که نقطه تلاقی این قطر با دایره موهر را  $\tau_{max}$  و  $\tau_{min}$  می نامیم. به این

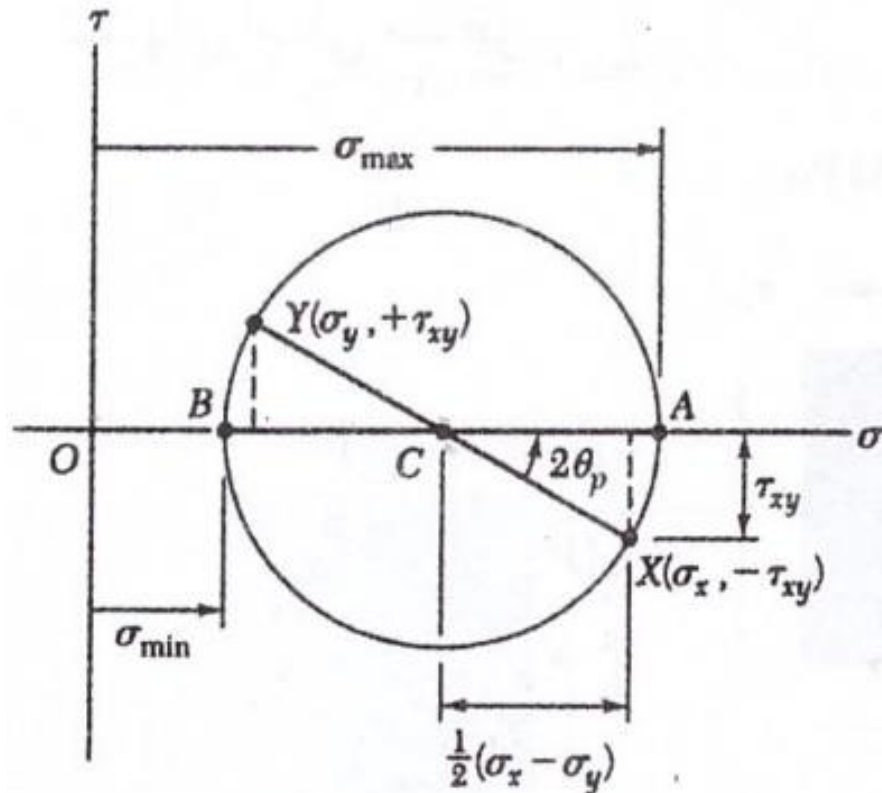
ترتیب دایره موهر ترسیم شده و کمیت های موردنظر به جز جهات اصلی بر روی آن مشخص شده اند و این جهات نیز در شکل

نشان داده شده اند. به عنوان مثال برای المان فرضی زیر، دایره موهر را رسم می نمایم.



گام اول : تعیین نقاط X و Y :

$$Y \left| \begin{array}{l} x = \sigma_y > 0 \\ y = \tau_{xy} \text{ (cw)} \end{array} \right. \quad X \left| \begin{array}{l} x = \sigma_x > 0 \\ y = \tau_{xy} \text{ (ccw)} \end{array} \right.$$



گام دوم: ترسیم محورها به همراه نقاط X و Y

گام سوم: وصل کردن نقاط X و Y به هم و بدست آوردن نقطه C

گام چهارم: ترسیم دایره به مرکز C و شعاع XC یا YC

گام پنجم: مشخص نمودن  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$

گام ششم: مشخص کردن  $\sigma'$

گام هفتم: تعیین  $\tau_{\max}$  و  $\tau_{\min}$

**نکات مهم:**

\* کوچکترین زاویه بین خط XY و محور افقی  $\sigma$  ، همان  $2\theta_{P1}$  بوده که با استفاده از آن و روابط بیان شده، می توان  $\theta_{S1}$

و  $\theta_{S2}$  را نیز بدست آورد. اگر زاویه  $2\theta_{P1}$  پادساعتگرد بود، مثبت و اگر ساعتگرد بود، منفی می باشد.

**\*\*** اگر در سوالی محورهای به اندازه  $\theta$  دوران داده شود و تنش‌ها در حالت جدید مدنظر باشند، با استفاده از دایره موهر بایستی یکی از نقاط  $X$  یا  $Y$  را به اندازه  $2\theta$  دوران داده و مختصات نقطه جدید را بدست می‌آوریم و مختصات نقطه جدید همان تنش‌ها در حالت ثانویه می‌باشد.

**\*\*** روش دایره موهر یک روش ترسیمی بوده و نیاز به لوازم ترسیمی و دقت در انجام ترسیم دارد و هرچه دقت بیشتر باشد، نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از روشهای تحلیلی مطابقت بیشتری دارد.

## ۱-۶- حالت کلی تنش

همانطور که گفته شد، تنش در حالت کلی کمیتی تانسور بوده که به صورت ماتریس زیر تعریف شده و نسبت به قطر اصلی متقارن می‌باشد:

$$\left[ \sigma_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

در حالت کلی نیز همانند حالت تنش مسطح، جهات اصلی وجود داشته که در آن تنش های نرمال  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  بدست آمده و تنش برشی در آنها صفر می باشد. با فرض  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ، آن گاه تنش های اصلی از رابطه زیر بدست می آیند:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1-17)$$

که در رابطه فوق  $I_1$  و  $I_2$  و  $I_3$  را نا متغیرهای تنش نامیده و برابرند با:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \\ I_3 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1-18)$$

پس از اینکه برای المان مورد نظر، با استفاده از روابط (۱-۱۷) و (۱-۱۸) مقادیر  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  بدست آمدند، با استفاده از رابطه زیر می توان  $\tau_{\max}$  را بدست آورد:

$$\tau_{\max} = \frac{\text{کوچکترین تنش اصلی} - \text{بزرگترین تنش اصلی}}{2} \quad (1-19)$$

**تمرین ۶:** به واسطه نیروهای اعمالی، المانی از قاب در حالت تنش مسطح در نقطه A نشان داده شده است. مطلوبست:

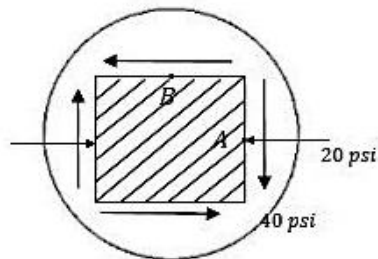
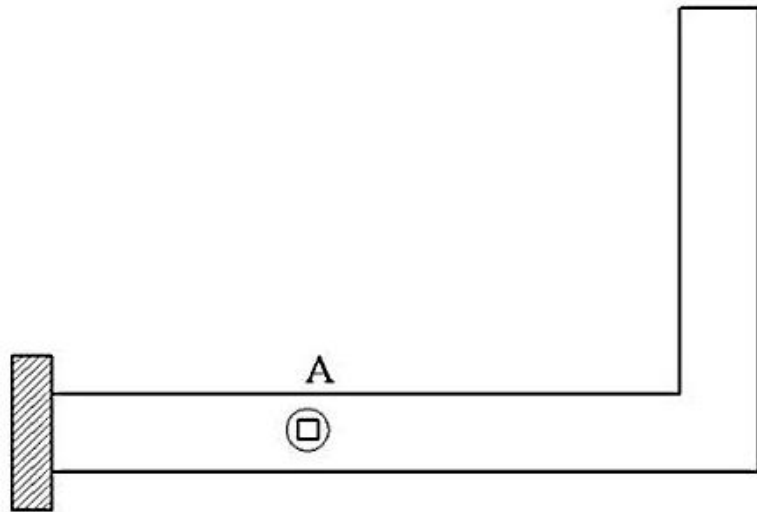
(الف) تعیین تنش های اصلی و جهات آنها

(ب) تنشهای برشی ماکزیمم و مینیمم و جهات آنها

(ج) ترسیم آنها

با استفاده از دایره موهر و روش تحلیلی مقادیر

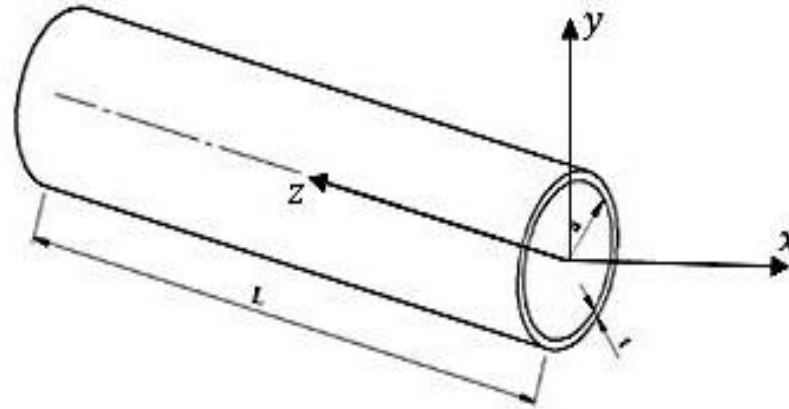
خواسته شده را محاسبه نموده و باهم مقایسه کنید.



DETAIL A  
SCALE 3 : 1

## ۷-۱- حالت کرنش مسطح (کرنش صفحه ای)

حالتی از کرنش بوده که در آن از مقدار کرنش در یک بعد صرفنظر می‌گردد و از نظر عملی زمانی رخ می‌دهد که یک بعد جسم در مقایسه با دو بعد دیگر آن بسیار بزرگتر باشد. به عنوان نمونه واقعی از این حالت، می‌توان به یک لوله بسیار بلند اشاره نمود که امتداد  $Z$  (طول آن) بلند بوده و می‌توان از کرنش در این امتداد صرفنظر نمود.



$$L \gg a, t \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \gamma_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y = f(x, y) \\ \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0 \end{cases} \quad (1-20)$$

بایستی به این نکته همواره توجه نمود که در این حالت کرنش در راستای  $z$  صفر بوده ولی تنش در این راستا صفر نمی باشد.  
 $(\sigma_z \neq 0)$

روابط کرنش برای دوران محوره‌های مختصات به اندازه  $\theta$  برای محوره‌های  $x' - y'$  به صورت زیر می باشد.

$$\begin{cases} \sigma_x \rightarrow \varepsilon_x \\ \sigma_{x'} \rightarrow \varepsilon_{x'} \\ \sigma_y \rightarrow \varepsilon_y \\ \sigma_{y'} \rightarrow \varepsilon_{y'} \end{cases} \begin{cases} \tau_{x'y'} = \frac{\gamma_{x'y'}}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{cases} \quad (1-21)$$

$$\varepsilon_{x'} = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right) \cos 2\theta + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \sin 2\theta \quad (1-22)$$

$$\varepsilon_{y'} = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) - \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right) \cos 2\theta - \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \sin 2\theta \quad (1-23)$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right) \sin 2\theta + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \cos 2\theta \quad (1-24)$$

## ۸-۱- حالت کرنش مسطح (کرنش صفحه ای)

مشابه با تنشهای اصلی، کرنشهای اصلی و امتدادهای آن از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\theta_{P1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right) \quad (1-25)$$

$$\theta_{P2} = \theta_{P1} + \frac{\pi}{2} \quad (1-26)$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2} \quad (1-27)$$

$$\theta_{s1} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}} \right) \quad (1-28)$$

$$\theta_{s2} = \theta_{s1} + \frac{\pi}{2} \quad (1-29)$$



$$\left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)_{\max \min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (1-30)$$

$$\epsilon_{ave} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad (1-31)$$

تمرین ۷: صفحه ای را تحت تنش قرار داده و کرنش‌های ایجاد شده در جسم به صورت زیر می‌باشد:

$$\epsilon_{0^\circ} = 0.00059$$

$$\epsilon_{45^\circ} = 0.0003$$

$$\epsilon_{90^\circ} = -0.00043$$

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\nu = 0.3$$

موارد زیر را محاسبه کنید:

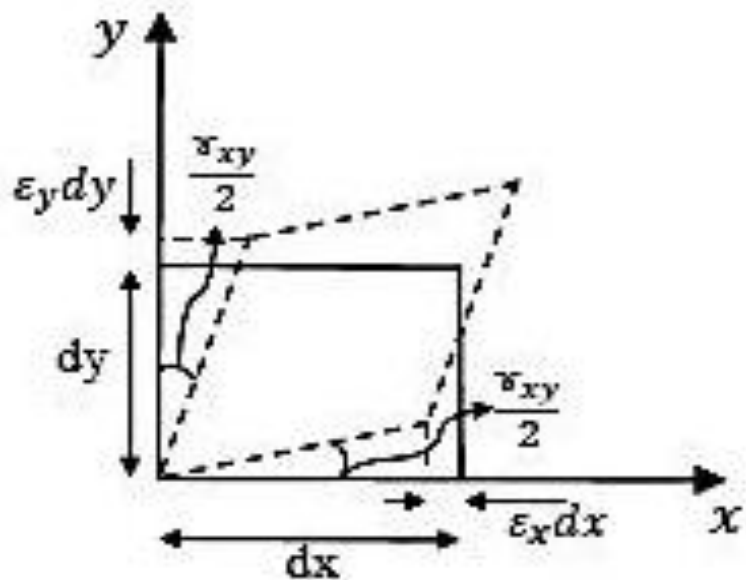
الف) کرنش‌های صفحه ای

ب) کرنش‌های اصلی و جهات اصلی

ج) کرنش‌های برشی  $\max$  و  $\min$  و جهات آنها

د) تنش‌های اصلی

تمرین ۸: در نقطه ای از یک جسم، مطابق با شکل زیر مقادیر کرنش به صورت زیر می باشد:



$$\begin{cases} \varepsilon_x = -350 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_y = 200 \times 10^{-6} \\ \gamma_{xy} = 80 \times 10^{-6} \end{cases}$$

مقادیر کرنش های اصلی و ماکزیمم کرنش برشی و جهت های آنها را تعیین کنید.

تا کنون روابط مربوط به انتقال کرنش ها و نیز کرنش های اصلی و کرنش های برشی ماکزیمم و جهات آنها، تعیین شده است. لیکن در این حالت نیز می توان به جهت سهولت و تسریع در فرآیند محاسبات، از روش ترسیمی دایره موهر استفاده کرد که این روش مزیت مشاهده گرافیکی کرنش های اصلی و نیز کرنش های برشی ماکزیمم را در اختیار مهندسان قرار می دهد. با ترکیب روابط قبلی معادله کلی دایره موهر در حالت کرنش مسطح به صورت زیر تعیین می شود:

$$(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{ave})^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)^2 = R^2 \quad (1-32)$$

که در رابطه اخیر:

$$\varepsilon_{ave} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad (1-33)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (1-34)$$

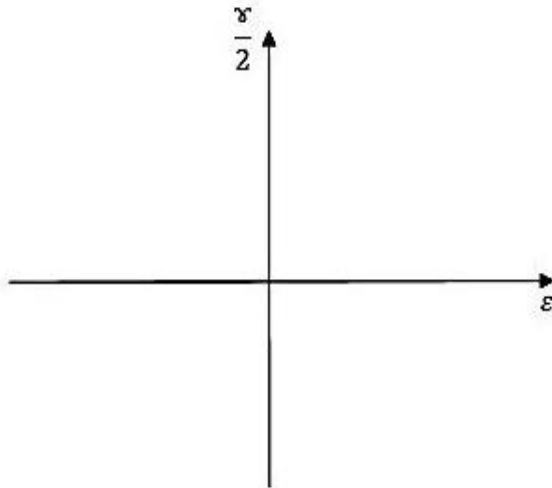
با استفاده از رابطه (۱-۳۲) مختصات مرکز دایره مور به صورت زیر تعریف می شود:

$$c \left| \begin{array}{l} \varepsilon_{ave} \\ 0 \end{array} \right.$$

**روش ترسیم دایره موهر:**

نحوه ترسیم در حالت کرنش مسطح دقیقا مشابه حالت تنش مسطح بوده و به صورت زیر می باشد:

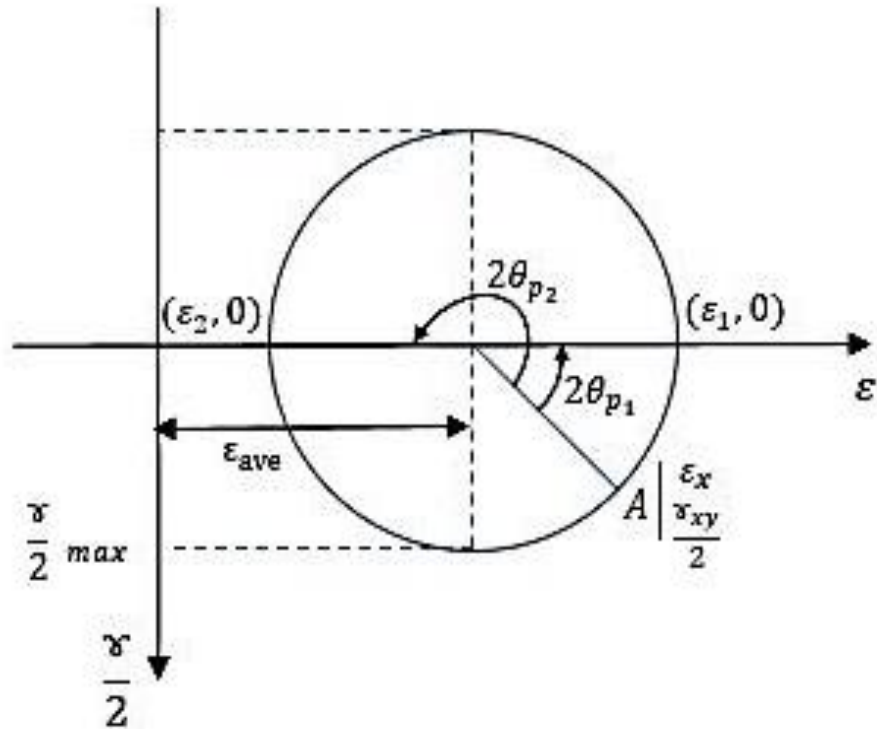
گام اول: دستگاه مختصات برای رسم دایره موهر را به شکل زیر در نظر می گیریم:



شکل (۱-۱۰)

گام دوم: با استفاده از مقادیر  $\varepsilon_x$ ،  $\varepsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  و نیز روابط (۱-۳۲) الی (۱-۳۵) پارامترهای کلیدی جهت ترسیم دایره موهر را بدست می آوریم. (نقطه A روی دایره، نقطه C مرکز دایره و نیز شعاع دایره موهر R).

گام سوم: دایره موهر را به شعاع  $R$  و مرکز  $C$  در دستگاه مختصات بیان شده ترسیم می‌نماییم.



شکل (۱-۱۱)

گام چهارم:  $2\theta_{p1}$  و  $2\theta_{p2}$  به ترتیب زوایای رسیدن به  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  در جهت پادساعتگرد روی دایره موهر می‌باشد. (مطابق با شکل فوق)

گام پنجم:  $\theta_{s1}$  و  $\theta_{s2}$  نیز از روابط (۱-۲۸) و (۱-۲۹) به دست می‌آیند.

**تمرین ۹:** در حالت کرنش مسطح، به المانی از جسم کرنشهای  $\varepsilon_x = 250 \times 10^{-6}$ ،  $\varepsilon_y = -150 \times 10^{-6}$  و  $\gamma_{xy} = 120 \times 10^{-6}$  وارد می گردد. کرنش های اصلی، کرنش های برشی ماکزیمم و جهات آنها را با استفاده از روابط تحلیلی و دایره موهر محاسبه نموده و نتایج را با یکدیگر مقایسه کنید.

## فصل دوم:

تغییر مکان (خیز) در تیرها

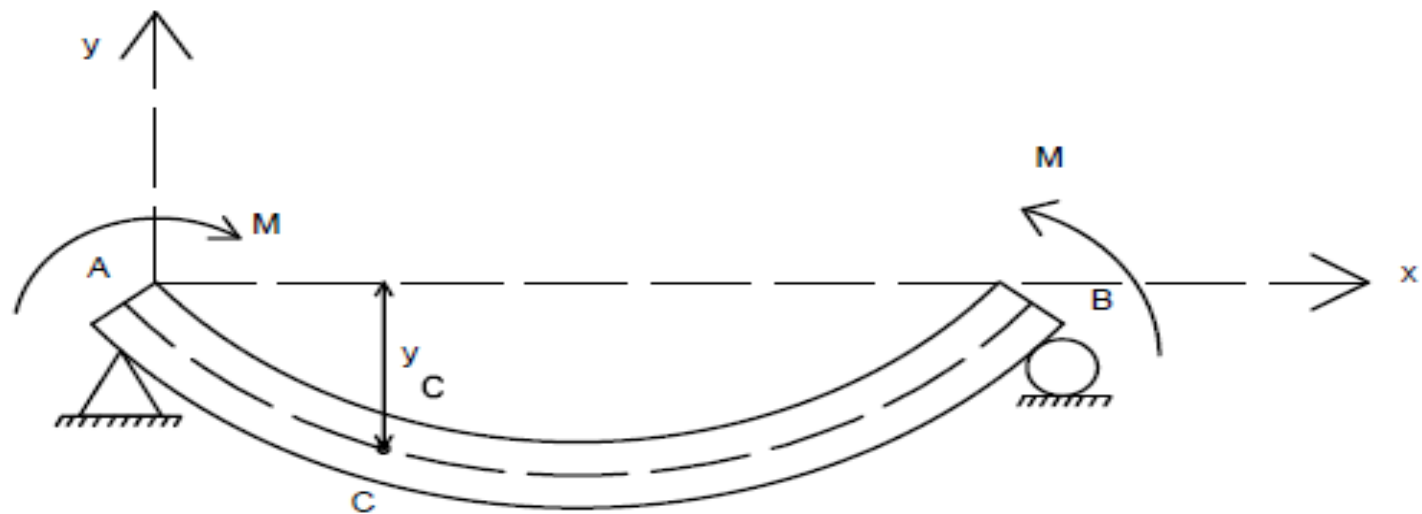
بارهای عرضی (بارهایی که در راستای محور تیر به آن اعمال نمی شوند) باعث ایجاد خمیدگی در تیر شده و تیر را به صورت یک منحنی در می آورند، طبق تعریف به فاصله قائم منحنی ایجاد شده از تا محور افقی خیز تیر می گویند. از نقطه نظر مهندسی محاسبه خیز در تیرها را می توان تقریباً مهمترین ایتهم در طراحی آنها دانست. در حالت کلی خیز در یک تیر در اثر دو عامل خمش و برش ایجاد شده که به سبب ناچیز بودن، از خیز ایجاد شده به وسیله برش صرف نظر می شود.

محاسبه خیز در تیرها از جنبه های بسیاری حائز اهمیت بوده که مهمترین آن ها را می توان به صورت زیر برشمرد:

- شبیه سازی در دنیای مهندسی از جمله ابزارهایی بوده که همواره مورد تأیید همه ی دانشمندان قرار گرفته و از نتایج حاصل از شبیه سازی بسیار استفاده می گردد. شبیه سازی و تقریب زدن سازه های غول آسا و واقعی با تیر از جمله ترفندهای مهندسین به منظور تسهیل در فرآیند محاسبات و طراحی می باشد چرا که سازه همواره به عنوان ساده ترین جسم برای تحلیل در میان سازه ها نام برده می شود. مثلاً در سکوهای نفتی و سکوهای پرتاب فضاپیماها بسیار از این تقریب بهره برده شده است که در این بین خیزتیرها نیز نقش بسیاری ایفا نموده است.



در ادامه نخست مفهوم خیز در تیرها تشریح شده و سپس روش های محاسباتی تعیین مقدار خیز بیان گردیده است و نیز سعی گردیده تا با حل انواع مثال های کاربردی، علاوه بر تأکید بر اهمیت موضوع، روشهای محاسبه خیز در تیرها به ساده ترین روش توضیح داده شود.

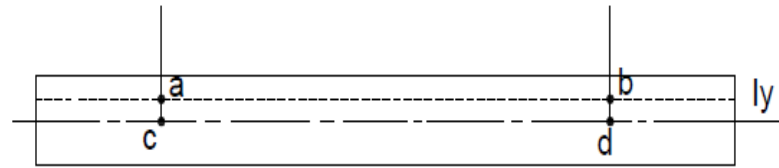


شکل (۲-۱)

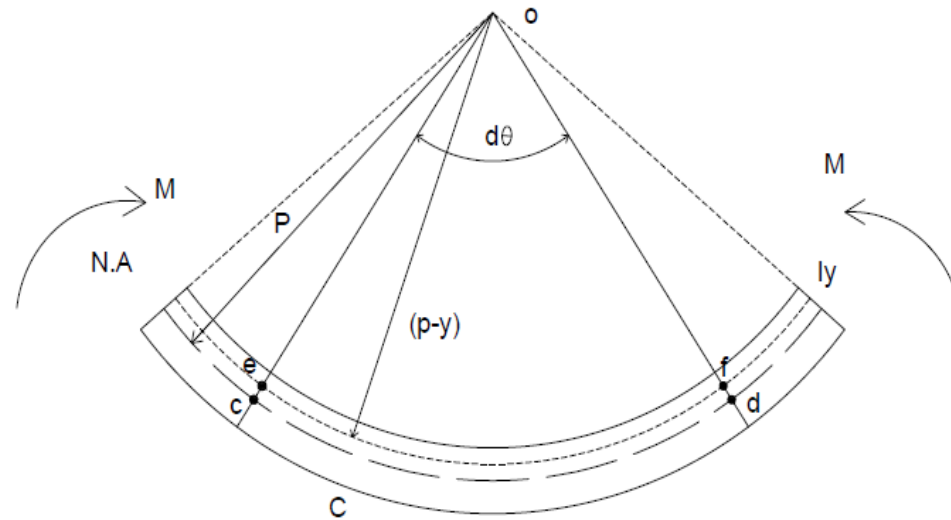
## ۲-۲- تعیین معادله منحنی کشسانی:

برای این منظور ابتدا تیر اولر-برنولی را تعریف نموده و فرض می‌نماییم که در ادامه مطالب برای تیر اولر-برنولی بیان شوند.

- تیر اولر- برنولی: تیری است که از فرضیات زیر تبعیت می کند:
- ۱- پس از بارگذاری، سطح مقطع تیر در هر نقطه عمود بر محور طولی تیر باقی می ماند.
  - ۲- تغییر طول ها در ناحیه ارتجاعی بوده و قانون هوک معتبر می باشد.



شکل (۲-۲) (قبل از خمش)



شکل (۲-۳) (پس از خمش)

از مقاومت مصالح دوره کاردانی به یاد داریم:

(۲-۱)

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

اگر  $\rho$  شعاع انحنای تار خنثی باشد، داریم:

(۲-۲)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر منحنی کشسانی تیر به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{M(x)}{EI} \Rightarrow EIy'' = M(x) \quad (۲-۳)$$

حاصلضرب  $EI$  را صلابت خمشی تیر نامیده و اگر  $EI$  در طول تیر ثابت نباشد، بایستی در رابطه (۳) بر حسب  $X$  جایگذاری شود و در غیر این صورت مثل یک عدد با آن برخورد می شود.

نکته ۱: در سرتاسر این فصل فرض بر آن است که  $EI$  ثابت است.

نکته ۲: در تیری که تحت بار گسترده  $W(x)$  قرار می گیرد، نیروی برشی  $V(x)$  و  $M(x)$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dx} = -W(x) \end{array} \right. \quad (2-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dx} = V(x) \end{array} \right. \quad (2-5)$$

در صورتی که EI ثابت باشد با ترکیب روابط بالا خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} EIy''' = V(x) \end{array} \right. \quad (2-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EIy'''' = -W(x) \end{array} \right. \quad (2-7)$$

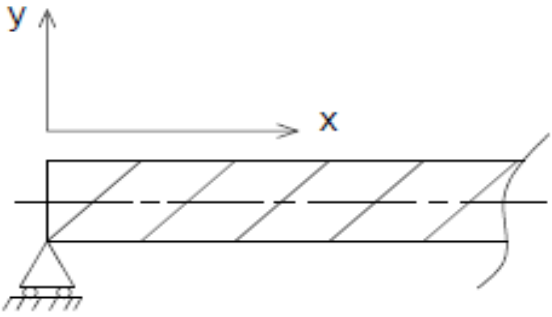
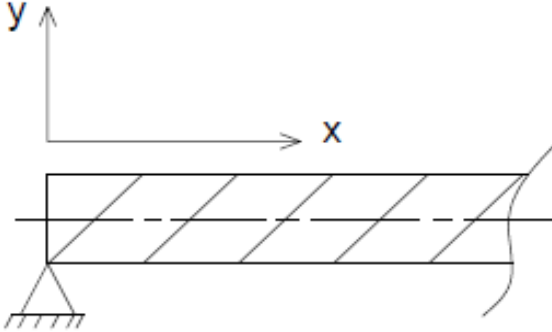
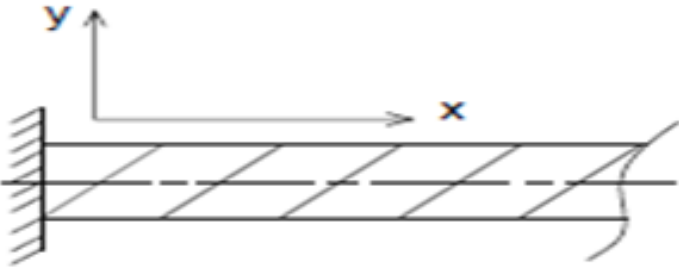
### ۳-۲- روش حل معادله منحنی کشسانی تیر و تعیین خیز در تیر

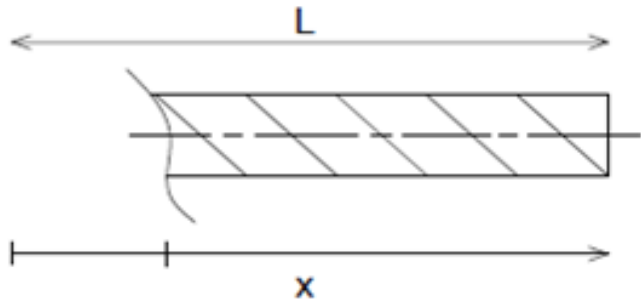
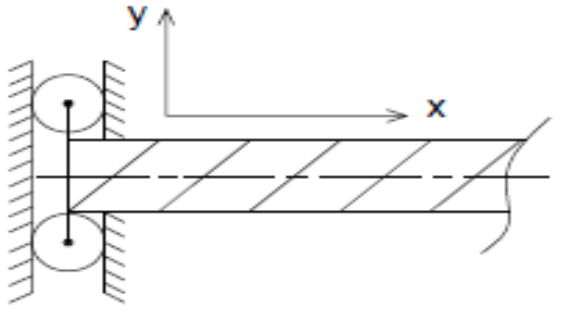
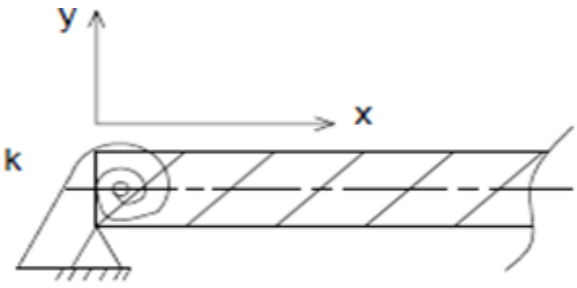
همان طور که در بالا بیان گردید، به منظور تعیین خیز در تیر به طور معمول از روابط (۲-۳) و (۲-۶) و (۲-۷) می‌توان استفاده نمود که بسته به مساله، رابطه لازم انتخاب می‌گردد.

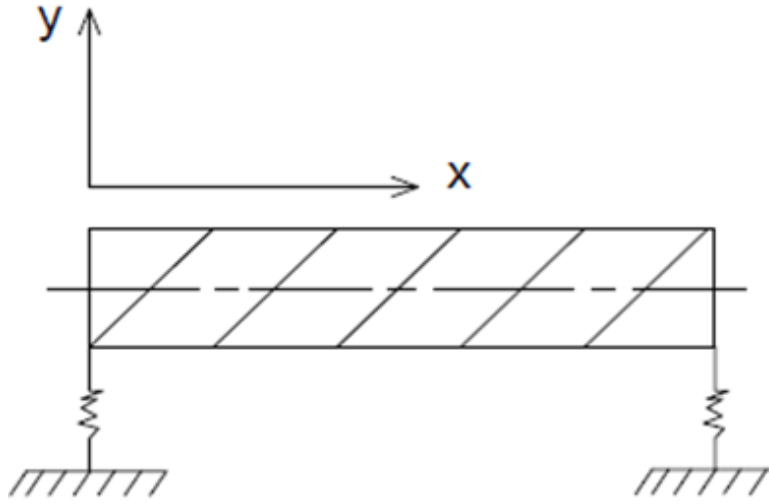
خیز در تیر با پارامتر  $\gamma$  بیان می‌شود حال آنکه در روابط (۲-۳) و (۲-۶) و (۲-۷) شاهد مشتقات مرتبه دوم، سوم و چهارم  $\gamma$  بوده، بنابراین بایستی از روابط فوق آن قدر انتگرال گرفته تا  $\gamma$  (خیز) ظاهر گردد. از مباحث مطرح شده در ریاضیات مقدماتی می‌دانیم که پس از هر بار انتگرال گیری، یک ثابت انتگرال گیری (C) نیز ظاهر شده که در نهایت بایستی با استفاده از شرایط مرزی تیر و یا در برخی موارد شرایط پیوستگی، مقدار آن مشخص گردد. در ادامه به عنوان یکی از مباحث مهم در خیز تیرها به بیان شرایط مرزی و شرایط پیوستگی پرداخته می‌شود:

### ۴-۲- شرایط مرزی:

همانطور که بیان گردید به منظور تعیین خیز تیر با استفاده از معادله منحنی کشسانی تیر، پس از انتگرال گیری ثوابتی ظاهر شده که بایستی با استفاده از شرایط مرزی تیر تعیین شوند که در ادامه برخی از متداول ترین شرایط مرزی جهت آشنایی ذکر می‌گردند:

نوع تکیه گاه	شکل گرافیکی	شرایط مرزی
تکیه گاه نوع اول (غلتکی)		$\text{at } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y'' = 0 \end{cases}$
تکیه گاه نوع دوم (پایه مفصلی)		$\text{at } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y'' = 0 \end{cases}$
تکیه گاه گیردار (طرّه ای)		$\text{at } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$

نوع تکیه گاه	شکل گرافیکی	شرایط مرزی
لبه آزاد تیر		$\text{at } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y'' = 0 \\ y''' = 0 \end{cases}$
تکیه گاه کشویی گیردار		$\text{at } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y''' = 0 \end{cases}$
فنر پیچشی در تکیه گاه		$\text{at } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ EIy'' = ky' \end{cases}$ <p style="text-align: right;"><math>y'</math> : جا به جایی دورانی</p>

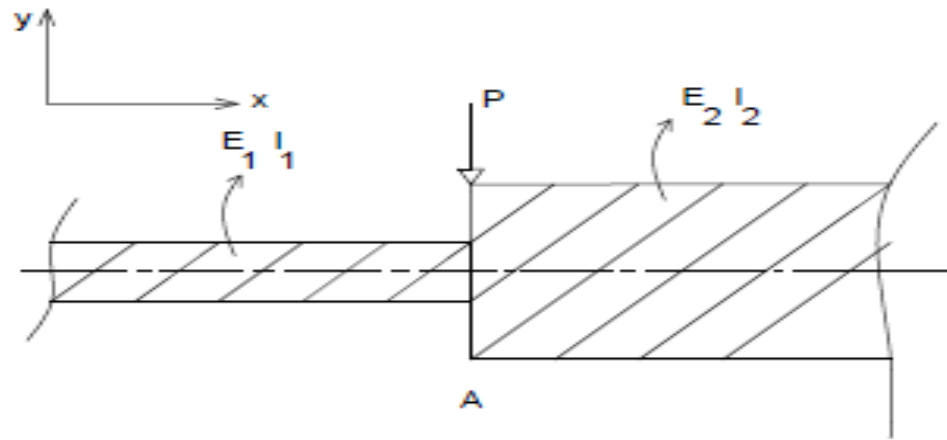
نوع تکیه گاه	شکل گرافیکی	شرایط مرزی
فنر خطی در تکیه گاه		$\left\{ \begin{array}{l} \text{at } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y'' = 0 \\ EIy''' = -K_2y \end{cases} \\ \text{at } x = L \Rightarrow \begin{cases} y'' = 0 \\ EIy''' = -K_1y \end{cases} \end{array} \right.$ <p>با فرض دوران پاد ساعتگرد (فشرده شدن <math>K_1</math> ، کشیده شدن <math>K_2</math> )</p>

که در ادامه به چگونگی استفاده از شرایط مرزی پرداخته خواهد شد.



## ۵-۲- شرایط پیوستگی

در صورتی که گشتاور و یا بارگذاری تیری در قسمت های مختلف آن متفاوت باشد یعنی نتوان آن ها را فقط با یک معادله برحسب  $X$  در طول تیر نمایش داد، یا این که تیر از قسمت هایی با  $EI$  متغیر ساخته شده باشد، برای بدست آوردن خیز بایستی روابط (۲-۳)، (۲-۶) و یا (۲-۷) به صورت جداگانه برای هر قسمت نوشته شود. در این شرایط برای تعیین ثوابت انتگرال گیری، علاوه بر شرایط مرزی باید از شرایط پیوستگی نیز استفاده نمود. منظور از شرایط پیوستگی، روابطی می باشند که بین تغییر مکان، شیب، گشتاور خمشی و نیروی برشی دو قطعه در نقطه اتصالشان برقرار می باشد. در اشکال زیر شرایط پیوستگی در نقطه ی اتصال (A) برای دو قطعه در حالات زیر نشان داده شده است.



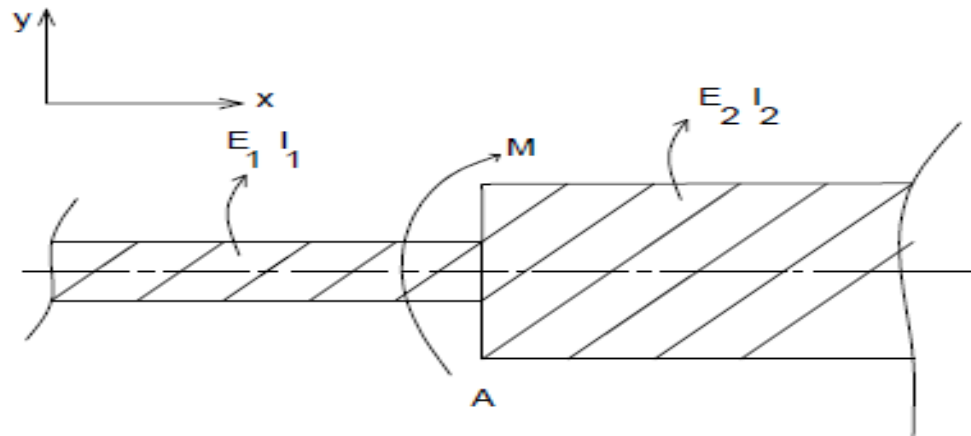
شکل (۲-۴)

$$y_1 = y_2$$

$$y'_1 = y'_2$$

$$E_1 I_1 y''_1 = E_2 I_2 y''_2$$

$$E_1 I_1 y'''_1 - E_2 I_2 y'''_2 = P$$



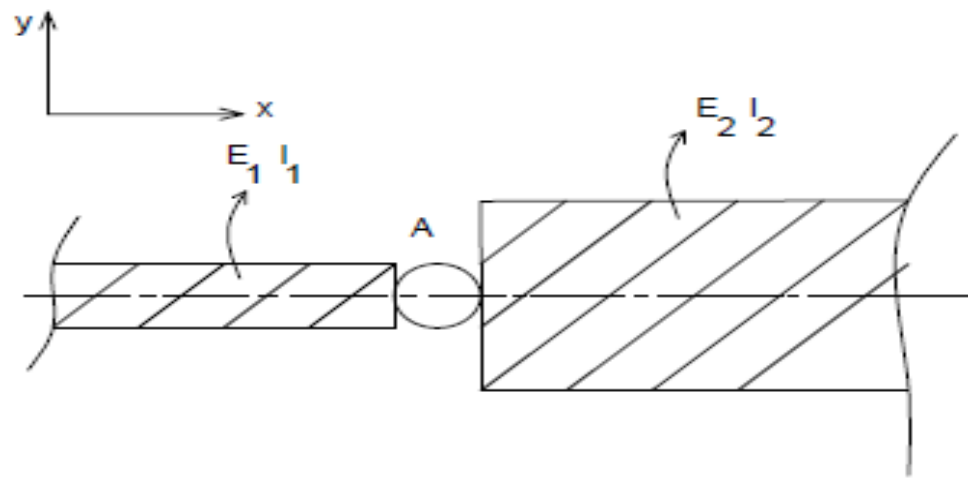
شکل (۲-۵)

$$y_1 = y_2$$

$$y'_1 = y'_2$$

$$E_2 I_2 y''_2 - E_1 I_1 y''_1 = M$$

$$E_1 I_1 y'''_1 = E_2 I_2 y'''_2$$

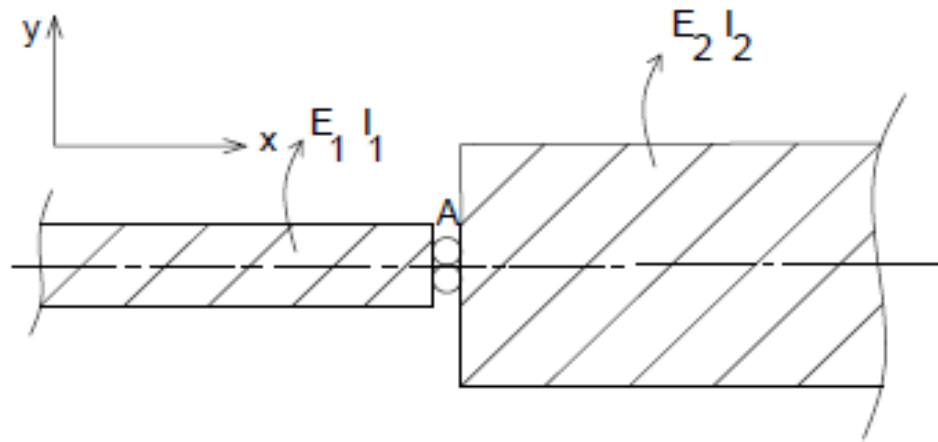


$$y_1 = y_2$$

$$y_1'' = y_2'' = 0$$

$$E_1 I_1 y_1''' = E_2 I_2 y_2'''$$

شکل (۲-۶)

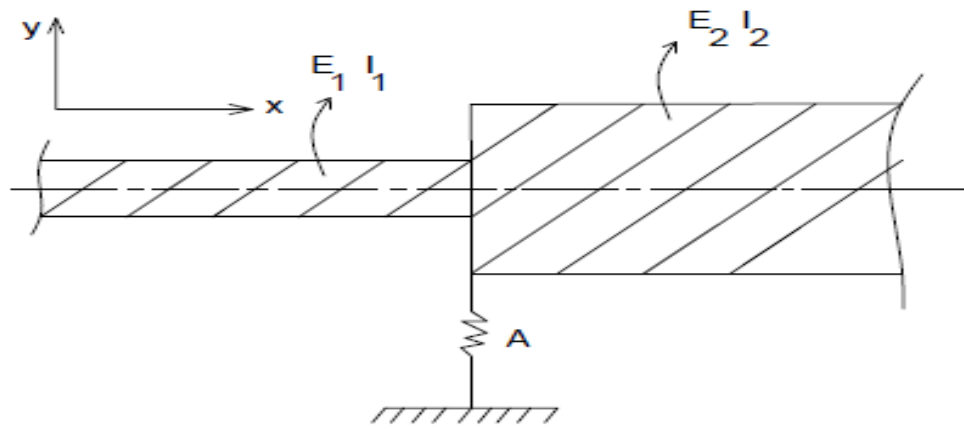


$$y_1' = y_2'$$

$$E_1 I_1 y_1'' = E_2 I_2 y_2''$$

$$y_1''' = y_2''' = 0$$

شکل (۲-۷)



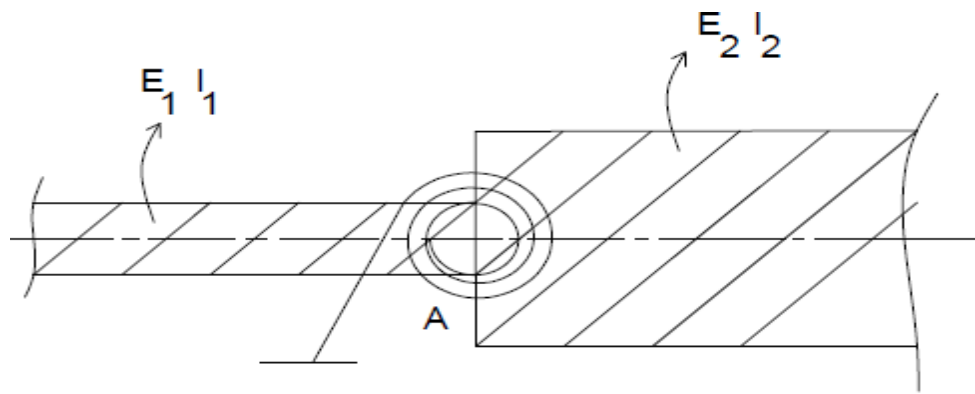
$$y_1 = y_2$$

$$y_1' = y_2'$$

$$E_1 I_1 y_1'' = E_2 I_2 y_2''$$

$$E_1 I_1 y_1''' - E_2 I_2 y_2''' = ky_1$$

شکل (۲-۸)



$$y_1 = y_2$$

$$y_1' = y_2'$$

$$E_1 I_1 y_1'' - E_2 I_2 y_2'' = ky_1'$$

$$E_1 I_1 y_1''' = E_2 I_2 y_2'''$$

شکل (۲-۹)

نکته: مرتبه  $y$  در شرایط مرزی و روابط پیوستگی که از آن‌ها برای تعیین ثوابت انتگرال استفاده می‌شود، باید از مرتبه معادله دیفرانسیل به کار گرفته شده کمتر باشد. به عنوان مثال اگر برای تعیین  $y$  از معادله  $EIy'' = M(x)$  استفاده شود، باید از شرایط مرزی و روابط پیوستگی که شامل  $y$  و یا  $y'$  می‌باشند، استفاده شود. همین‌طور در صورتی که از معادله  $EIy'''' = -W(x)$  استفاده شود، شرایط مرزی و روابط پیوستگی که شامل  $y$  و  $y'$  و  $y''$  و یا  $y'''$  می‌باشند، استفاده گردد.

## ۶-۲- تعیین خیز تیر با استفاده از معادله منحنی کشسانی تیر و روش مقطع زدن جهت تعیین گشتاور خمشی $M$ :

همانطور که قبلاً بیان گردید استفاده از رابطه منحنی کشسانی تیر جهت تعیین خیز تیر، راه حل عمومی و گسترده ای بوده و رابطه ی (۲-۳) یکی از کاربردی ترین انواع حالات معادله منحنی کشسانی تیر بوده که در آن با جایگذاری گشتاور خمشی ( $M$ ) بر حسب  $x$  و انتگرال گیری و استفاده از شرایط مرزی و پیوستگی جهت تعیین ثوابت انتگرال گیری، می توان به خیز تیر رسید. در بین روش های گوناگون تعیین گشتاور خمشی ( $M$ )، می توان روش مقطع زدن که در دوره کاردانی مفصل به توضیح آن پرداخته شده را عمومی ترین روش دانست که در ادامه با حل مثال های متنوع به تشریح این روش پرداخته خواهد شد.

فصل سوم

روشهای انرژی

## مقدمه:

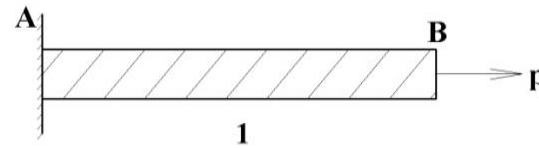
در فصول گذشته از دروس مقاومت مصالح ۱ و ۲ به روابط موجود میان نیروها و تغییر شکل‌های حاصل از بارگذاری‌های مختلف پرداخته شد. لیکن در این فصل مفهوم مهم انرژی کرنشی ارتجاعی بحث می‌شود که در کنار مفاهیم تنش و کرنش میتواند ابزار توانمندی در مهندسی مکانیک در طراحی جامدات به شمار می‌رود. انرژی کرنشی ارتجاعی را در حالت عمومی میتوان به صورت زیر تعریف نمود:

**« برابر است با کار انجام شده توسط بارهای وارد شده بر یک عضو»** همچنین چگالی انرژی کرنشی نیز بصورت **انرژی کرنشی در واحد حجم ماده** تعریف شده و برابر با سطح زیر منحنی تنش کرنش آن ماده می‌باشد.

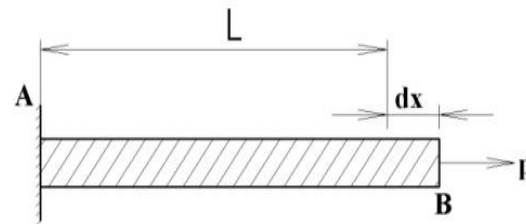


### ۱-۳: انرژی کرنشی ارتجاعی

میله یکنواخت  $AB$  به طول  $L$  و سطح مقطع  $A$  را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. هنگامیکه میله تحت بار محوری  $p$  قرار گرفته و به آهستگی افزایش طول می یابد.

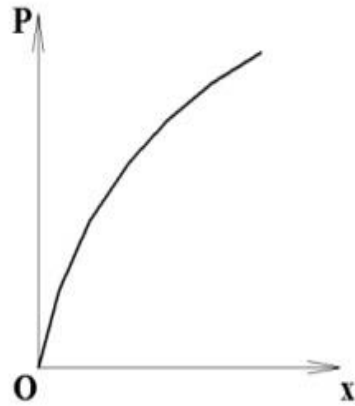


شکل (۱)



شکل (۲)

با رسم منحنی بار نسبت به تغییر شکل میله نموداری بدست می آید که به مشخصات میله وابسته است (شکل ۳)



شکل (۳)

حال کار انجام شده توسط بار مذکور را وقتی که طول میله به مقدار کوچکی افزایش می یابد بصورت حاصل ضرب بار در افزایش طول آن طبق رابطه زیر تعریف می گردد:

$$dU = p dx$$

(۳-۱)

در این صورت کل کار با انتگرال گیری از رابطه (۳-۱) بدست آمده و برابر خواهد بود با:

$$U = \int_0^{x_1} p dx \quad (3-2)$$

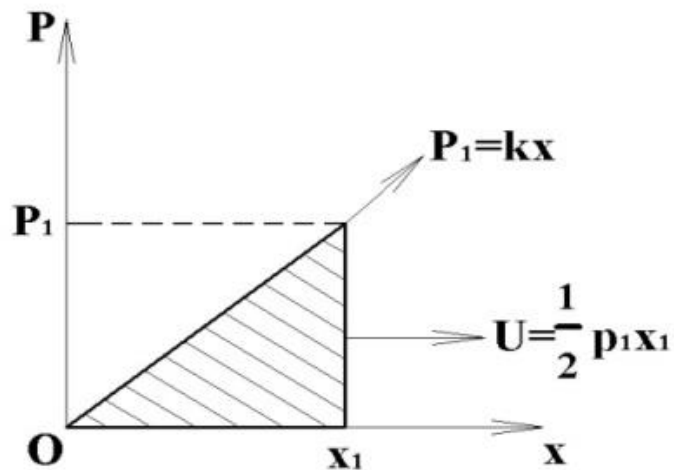
که برابر است با سطح زیر نمودار  $p-x$  بین دو مقدار  $0$  تا  $x_1$ . این مقدار کار انجام شده را انرژی کرنشی ارتجاعی میله می نامیم که کمیتی اسکالر و همواره مثبت می باشد. نکته: واحد کار و انرژی در دستگاه SI و US به صورت زیر بیان می شود:

$$SI : 1N.m = 1j \quad (3-3)$$

$$US : 1ft.lb \quad or \quad in.lb$$

در حالت تغییر شکل خطی و کشسان می توان رابطه بین بار و تغییر مکان میله را به صورت  $p=kx$  بیان نمود که با جایگذاری در رابطه (۳-۲) خواهیم داشت:

$$U = \int_0^{x_1} kx dx = 1/2 kx_1^2 = 1/2 px_1 \quad (3-4)$$



( شکل ۴ )

## ۲-۳: چگالی انرژی کرنشی

بمنظور تعیین رابطه چگالی انرژی کرنشی، انرژی کرنشی کل سیستم را به حجم آن تقسیم می کنیم. با توجه به این مطلب برای میله ای با طول  $L$  و سطح مقطع  $A$  خواهیم داشت:

$$(2) \Rightarrow \frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{V} dx = \int_0^{x_1} \frac{P}{AL} dx = \int_0^{x_1} \frac{P}{A} \frac{dx}{L} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x \Rightarrow \frac{U}{V} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon_x \quad (3-5)$$

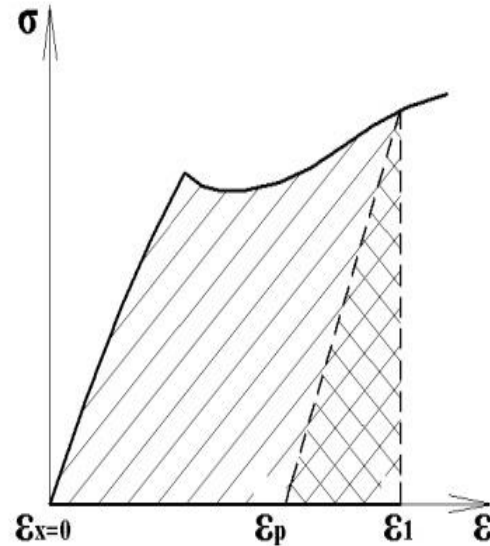
نکته : گفتنی است که انرژی کرنشی ارتجاعی و تنش از نظر بعد یکسان هستند و به صورت زیر بیان می شوند:

$$SI : 1 \text{ j/m}^3 = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ pa} \quad (3-6)$$

$$US : 1 \text{ lb.in/in}^3 = 1 \text{ lb/in}^2 = 1 \text{ psi}$$

لازم به ذکر است که چگالی انرژی کرنشی  $u$  همان سطح زیر نمودار تنش کرنش جسم از  $\epsilon_x = 0$  تا  $\epsilon_x = \epsilon_1$

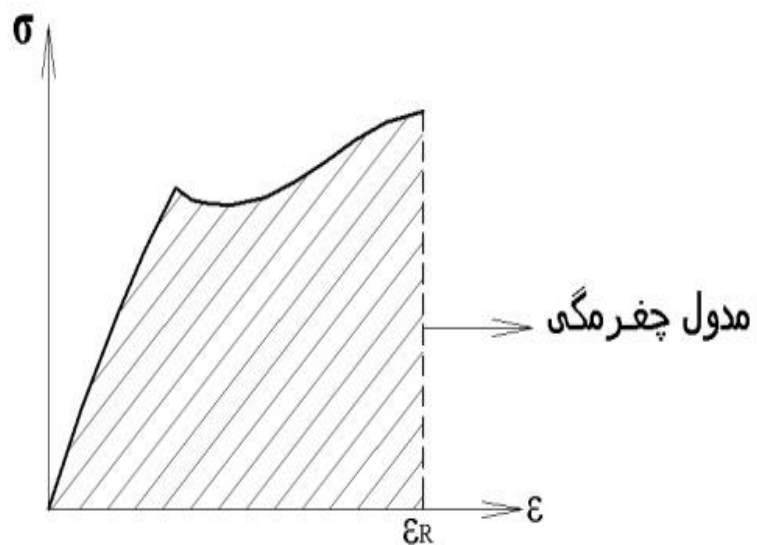
می باشد (مطابق شکل ۵)



شکل (۵)

اگر میله در اثر بار اعمالی وارد ناحیه پلاستیک شود، یک کرنش ماندگار در میله رخ داده که با  $\epsilon_p$  نشان داده میشود. در واقع تنها مقدار انرژی معادل با سطح مثلثی شکل فوق پس از بارگذاری و بار برداری قابل استفاده خواهد بود و مابقی انرژی بصورت گرما تلف خواهد شد

اگر کرنش در لحظه گسیختگی ماده را با  $\epsilon_R$  نمایش دهیم، سطح زیر نمودار تنش کرنش ماده تا کرنش گسیختگی مدول چقرمگی ( سختی ) آن ماده نامیده میشود. گفتنی است که چقرمگی هر ماده به شکل پذیری آن و نیز استحکام نهایی آن بستگی خواهد داشت. از طرفی میزان تحمل بار ضربه ای هر سازه کاملاً به چقرمگی مصالح آن بستگی دارد.



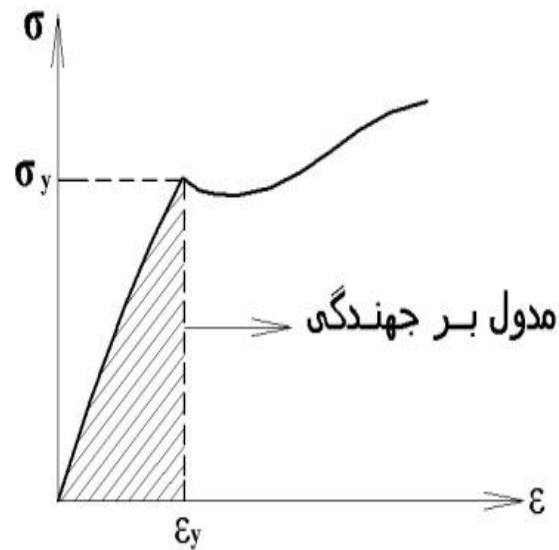
( شکل ۶ )

اگر در محدوده الاستیک خطی قرار داشته باشیم قانون هوک برقرار بوده و از رابطه (۵) خواهیم داشت:

$$u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x d\varepsilon_x = \int_0^{\varepsilon_1} E\varepsilon_x d\varepsilon_x = 1/2 E\varepsilon_1^2 = \sigma_1^2 / 2E \quad (۳-۷)$$

از طرفی مدول برجهندگی به صورت انرژی کرنشی ماده تا کرنش تسلیم آن ماده تعریف میشود به عبارت دیگر سطح زیر نمودار تنش کرنش زمانی که  $\sigma_1 = \sigma_y$  می باشد را مدول بر جهندگی می نامند و با توجه به رابطه ۷ برای آن خواهیم داشت:

$$u_y = \frac{\sigma_y^2}{2E} \quad (۳-۸)$$



(شکل ۷)



### ۳-۳: رابطه انرژی کرنشی کشسانی در حالت تنش های عمودی

زمانی که تنش محوری وارده به سازه ثابت باشد از رابطه (۷) میتوان چگالی انرژی کرنشی سازه را تعیین نموده و خواهیم داشت:

$$u = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x = \int_0^{\varepsilon_x} E\varepsilon_x d\varepsilon_x = 1/2 E\varepsilon_x^2 = 1/2 \sigma_x \varepsilon_x = \sigma_x^2 / 2E \quad (۳-۹)$$

بنا بر این انرژی کرنشی کل برابر خواهد بود با:

$$U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \quad (۳-۱۰)$$

رابطه (۳-۱۰) تنها برای تغییر شکل های کشسان معتبر بوده و فقط در حالت تنش های محوری کاربرد دارد. از آنجا که تنشهای محوری ناشی از دو عامل بارگذاری محوری و بارگذاری خمشی می باشند در ادامه ی بحث به تقسیم بندی رابطه انرژی کرنشی ارتجاعی با توجه به نوع بار گذاری وارده پرداخته می شود:

الف) انرژی کرنشی کشسانی ناشی از بارگذاری محوری  
زمانی که تیر شکل ۱ تحت بار  $p$  قرار گیرد خواهیم داشت:

$$\sigma_x = p/A \quad (3-11)$$

$$(10), (11) \Rightarrow U = \int_V \frac{p^2}{2EA^2} dV \quad (3-12)$$

که در رابطه فوق:

$$dV = A dx \quad (3-13)$$

$$(12), (13) \Rightarrow U = \int_0^L \frac{p^2}{2EA} dx \quad (3-14)$$

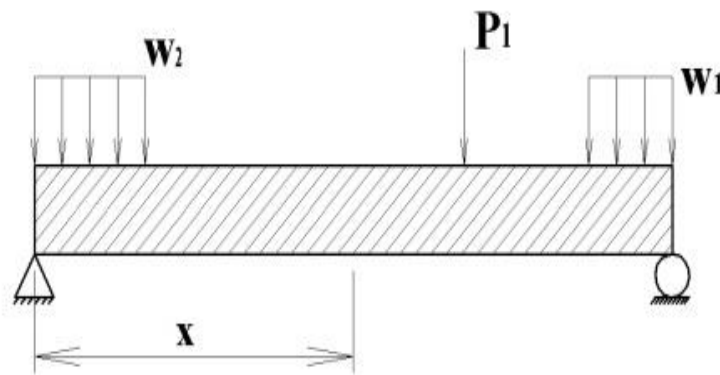
چنانچه سطح مقطع و مدول الاستیسیته و بار وارده به تیر ثابت باشند، خواهیم داشت:

$$U = \frac{p^2 L}{2EA} \quad (3-15)$$

ب) رابطه انرژی کرنشی کشسانی در حالت بارگذاری خمشی

تیری را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که تحت انواع بارهای عرضی قرار گرفته و گشتاور خمشی به فاصله  $x$  از تکیه گاه آن با رابطه  $M(x)$  بیان شود. با توجه به رابطه (۳-۱۰) خواهیم داشت:

$$U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_V \frac{(My/I)^2}{2E} dV = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx = \int \frac{M^2}{2EI^2} (\int y^2 dA) dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (3-16)$$



(شکل ۸)

### ۳-۴: انرژی کرنشی کشسانی در حالت تنش های برشی

وقتی جسمی تحت تنش های برشی صفحه ای  $\tau_{xy}$  قرار می گیرد رابطه انرژی کرنشی آن برابر خواهد بود با:

$$U = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad (3-17)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (3-18)$$

$$(17), (18) \Rightarrow U = \int_0^{\gamma_{xy}} G\gamma_{xy} d\gamma_{xy} = \frac{1}{2} G\gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \quad (3-19)$$

$$u = \frac{dU}{dV} \Rightarrow dU = u dV \Rightarrow U = \int_V u dV \quad (3-20)$$

$$(19), (20) \Rightarrow U = \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV \quad (3-21)$$