

# ساده سازی با جدول کارنو

## فصل: ۳

## ساده سازی با جدول کارنو

□ در ساده سازی توابع به روش جبر بول همیشه تابع بصورت مینیم خود منتهی نمی شود لذا برای آنکه بتوانیم جملات را طوری بگیریم که به ساده ترین حالت خود منتهی شود از روشهای تصویری (جدول کارنو) استفاده می کنیم

□ در این روش فضا برای یک تابع با  $n$  متغیر ورودی به  $2^n$  سلول تقسیم می شود

□ هر سلول بیان کننده یا نشان دهنده یک مینترم یا ماکسترم است

□ برای ساده سازی اول بزرگترین جمله مجاور ( $2^n$ ) را در نظر می گیریم

□ جمله های مجاور جمله هایی هستند که فقط در یک متغیر تغییر علامت می دهند

□ متغیرهایی که در این جمله ساده و مکمل شده دارند حذف می شوند

□ سپس جمله مجاور ( $2^{n-1}$ ) را انتخاب کرده و ...

□ آنقدر تکرار می کنیم که جمله ای باقی نماند



# جداول کارنو

جدول با دو متغیر

$m_0$	$m_1$
$m_2$	$m_3$

(a)

	$y$	$y$	
		0	1
$x$	0	$m_0$ $x'y'$	$m_1$ $x'y$
$x$	1	$m_2$ $xy'$	$m_3$ $xy$

(b)



# جداول کارنو

جدول با سه متغیر

$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$

(a)

		$y$			
		$yz$		$y$	
$x$	0	00	01	11	10
	1	00	01	11	10
		$z$			
		$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
0		$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1		$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
1		$xy'z'$	$xy'z$	$xyz$	$xyz'$

(b)



# جداول کارنو

جدول با سه متغیر

$f(x,y,z)$

	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

# جداول کارنو

جدول با چهار متغیر □

$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{15}$	$m_{14}$
$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$

(a)

		$y$			
		$yz$	00	01	11
$w$	$wx$	00	01	11	10
	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$	
	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$	
	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$	
	01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
	11	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{15}$	$m_{14}$
	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$	
	10	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$
	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$	
		$z$			
		$x$			

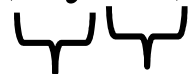
(b)



# جداول کارنو

جدول با چهار متغیر

$f(x,y,z,t)$

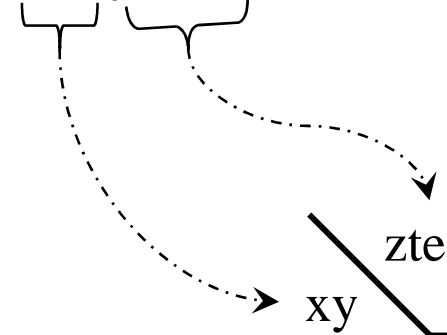


	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

# جداول کارنو

جدول با پنج متغیر

$f(x,y,z,t,e)$



	xy \ zte	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4	
01	8	9	11	10	14	15	13	12	
11	24	25	27	26	30	31	29	28	
10	16	17	19	18	22	23	21	20	



## جداول کارنو

جدول با پنج متغیر: استفاده از دو جدول ۱۶ سلولی بجای یک جدول ۳۲ سلولی □

$f(x,y,z,t,e)$

		te			
		00	01	11	10
yz	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

$x=0$

		zt			
		00	01	11	10
xy	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

$x=1$

## جداول کارنو

جدول با پنج متغیر: استفاده از دوجداول ۱۶ سلولی بجای یک جدول ۳۲ سلولی □

		f(x,y,z,t,e)			
		zt	00	01	11
xy		00	01	11	10
00		1	3	7	5
01		9	11	15	13
11		25	27	31	29
10		17	19	23	21

e=1

		f(x,y,z,t,e)			
		zt	00	01	11
xy		00	01	11	10
00		0	2	6	4
01		8	10	14	12
11		24	26	30	28
10		16	18	22	20

e=0

## جداول کارنو

مثال

$$F(x, y, z) = \Sigma(2, 3, 4, 5)$$

x	yz			
	00	01	11	10
0	$m_0$	$m_1$	$m_3$ 1	$m_2$ 1
1	$m_4$ 1	$m_5$ 1	$m_7$	$m_6$

Annotations:  $x'y$  points to the top-right 1s;  $xy'$  points to the bottom-left 1s;  $y$  spans the top two columns;  $z$  spans the bottom two columns.

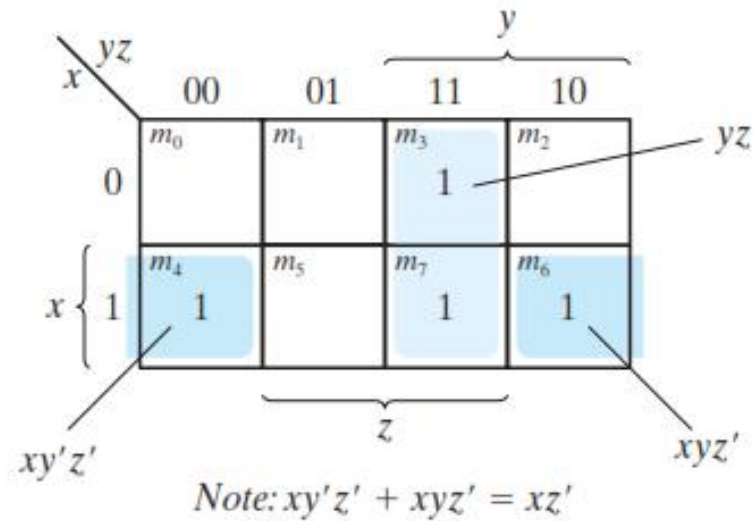
$$F(x, y, z) = \Sigma(2, 3, 4, 5) = x'y + xy'$$



## جداول کارنو

مثال

$$F(x, y, z) = \Sigma(3, 4, 6, 7)$$



$$F(x, y, z) = \Sigma(3, 4, 6, 7) = yz + xz'$$



## جداول کارنو

$$F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$$

مثال

		y			
		00	01	11	10
x	0	$m_0$ 1	$m_1$	$m_3$	$m_2$ 1
	1	$m_4$ 1	$m_5$ 1	$m_7$	$m_6$ 1

Labels:  $y'z'$  (left),  $yz'$  (right),  $xy'$  (bottom),  $z$  (bottom center)

Note:  $y'z' + yz' = z'$

$$F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6) = z' + xy'$$



## جداول کارنو

$$F = A'C + A'B + AB'C + BC$$

مثال

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 2, 3, 5, 7)$$

A	BC			
	00	01	11	10
0	$m_0$	$m_1$ 1	$m_3$ 1	$m_2$ 1
1	$m_4$	$m_5$ 1	$m_7$ 1	$m_6$

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function  $F(A, B, C) = \Sigma(1, 2, 3, 5, 7)$ . The map is a 2x4 grid with rows labeled A (0 and 1) and columns labeled BC (00, 01, 11, 10). The cells containing 1s are  $m_1, m_2, m_3, m_5, m_7$ . The map is grouped into two prime implicants:  $A'B$  (covering  $m_1, m_2, m_3$ ) and  $C$  (covering  $m_1, m_3, m_5, m_7$ ). The simplified function is  $F = C + A'B$ .

$$F = C + A'B$$



# جداول کارنو

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

مثال

		yz		y			
				00	01	11	10
wx	w'y'z'	00	m <sub>0</sub>	m <sub>1</sub>	m <sub>3</sub>	m <sub>2</sub>	
		1	1		1		
01	w'yz'	m <sub>4</sub>	m <sub>5</sub>	m <sub>7</sub>	m <sub>6</sub>		
		1	1		1		
11	xyz'	m <sub>12</sub>	m <sub>13</sub>	m <sub>15</sub>	m <sub>14</sub>		
		1	1		1		
10	wz'	m <sub>8</sub>	m <sub>9</sub>	m <sub>11</sub>	m <sub>10</sub>		
		1	1				
		z					

Note:  $w'y'z' + w'yz' = w'z'$   
 $xy'z' + xyz' = xz'$

$$F = y' + w'z' + xz'$$

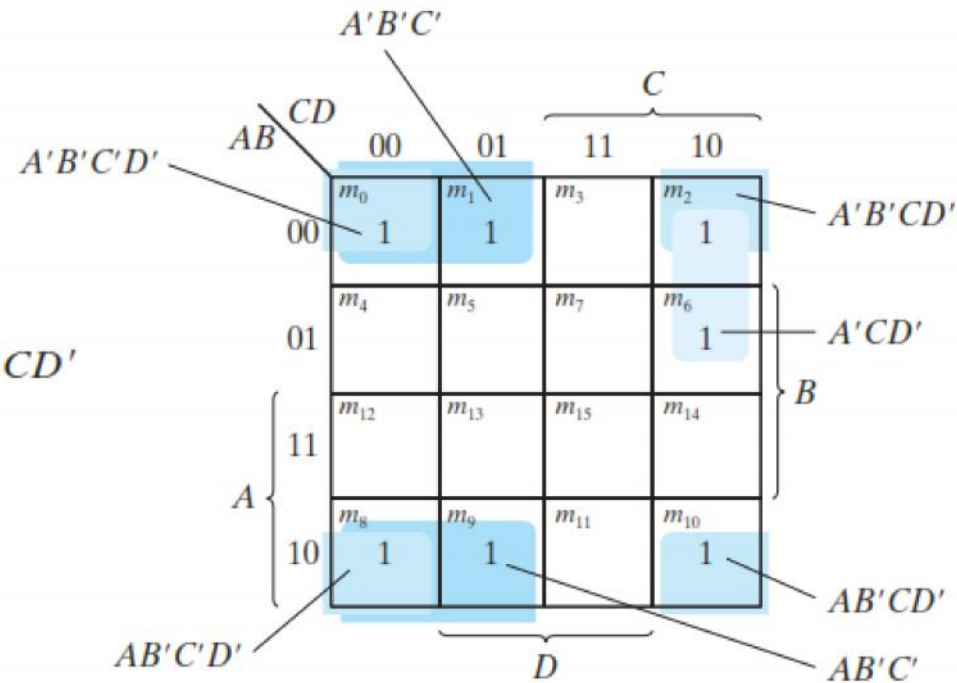


# جداول کارنو

مثال

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$$

$$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$



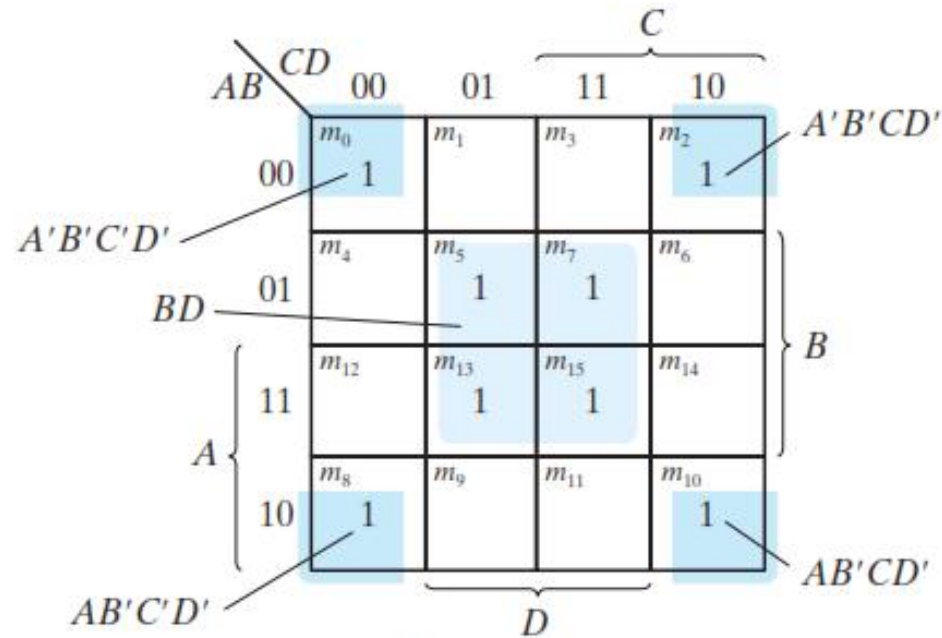
Note:  $A'B'C'D' + A'B'CD' = A'B'D'$   
 $AB'C'D' + AB'CD' = AB'D'$   
 $A'B'D' + AB'D' = B'D'$   
 $A'B'C' + AB'C' = B'C'$





# جداول کارنو

مثال



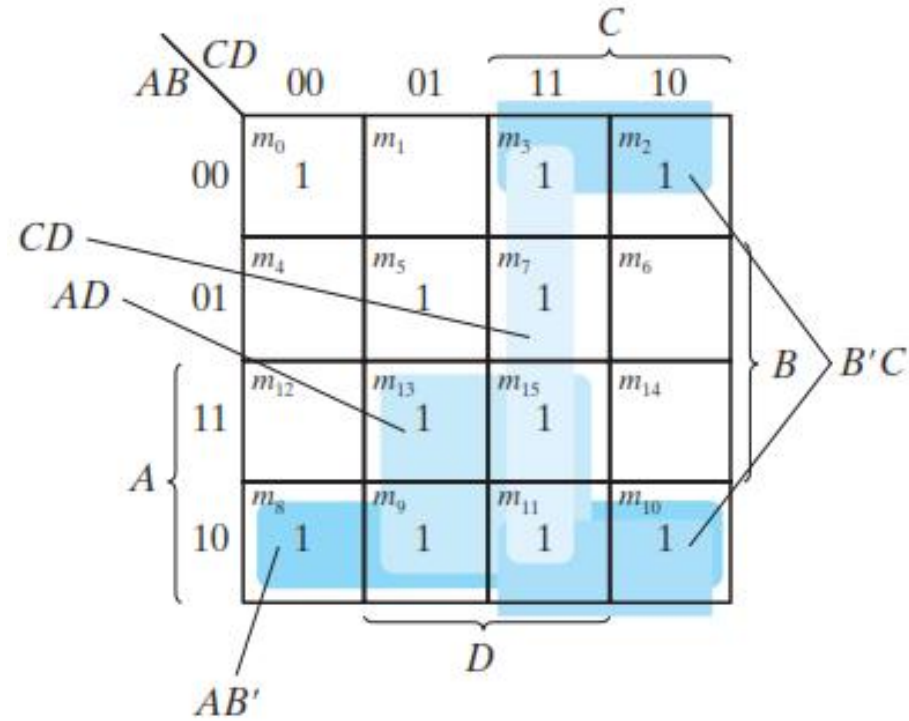
Note:  $A'B'C'D' + A'B'CD' = A'B'D'$   
 $AB'C'D' + AB'CD' = AB'D'$   
 $A'B'D' + AB'D' = B'D'$

(a) Essential prime implicants  
 $BD$  and  $B'D'$



# جداول کارنو

مثال



# جداول کارنو

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

مثال

AB		C			
		00	01	11	10
00	$m_0$	1	1	0	1
	$m_1$	1	1	0	1
01	$m_4$	0	1	0	0
	$m_5$	1	1	0	0
11	$m_{12}$	0	0	0	0
	$m_{13}$	0	0	0	0
10	$m_8$	1	1	0	1
	$m_9$	1	1	0	1
		D			

$BC'D'$  (points to  $m_4$ )  
 $BCD'$  (points to  $m_3$ )  
 $B$  (bracketed rows 01 and 11)  
 $AB$  (bracketed rows 11 and 10)

Note:  $BC'D' + BCD' = BD'$

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10) = B'D' + B'C' + A'C'D =$$

$$(A' + B')(C' + D')(B' + D)$$



# جداول کارنو

مثال

$$f(x,y,z,t,e) = \sum m(2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,16,18,22,24,25,27,28,29,31)$$

zte		xy							
		000	001	011	010	110	111	101	100
xy	00				1	1	1	1	1
	01	1	1	1	1		1	1	1
	11	1	1	1			1	1	1
	10	1			1	1			

$$f(x,y,z,t,e) = xyz + x'yz' + xz't'e' + ye + yt' + y'te'$$

## جداول کارنو

### □ توابع بولی دارای حالت بی اهمیت یا don't care

□ یک ها و صفر های خروجی یک جدول صحت بیانگر ترکیبی از متغیر هاست که تابع در آنها صفر و یک شده و اصولا اینطور برداشت می شود که همیشه خروجی یا صفر است یا یک. ولی این فرض درست نیست زیرا در بعضی کاربردها ، اصلا ترکیبی از متغیر ها وجود ندارد

□ بعنوان مثال در کد bcd تعدادی از مین ترم ها وجود ندارند ما به این حالت ها حالت بی اهمیت یا don't care می گوئیم

□ در ساده سازی از این حالات به عنوان یک مؤلفه ی موثر می توان استفاده کرد

□ به این صورت که اگر ۱ بودن برخی از این حالات باعث ساده سازی بیشتر شود، ما آنها را 1 فرض می کنیم و اگر نه، به نفع ماست که آنها را 0 فرض کنیم.

## جداول کارنو

مثال

$$f(x,y,z,t) = \sum m(1,2,7,11,12,15) + d(0,3,6,9,13,14)$$

$$f(x,y,z,t) = x'z + xy + y't$$

zt \ xy	00	01	11	10
00	*	1	*	1
01			1	*
11	1	*	1	*
10		*	1	

## جداول کارنو

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(1, 3, 7, 11, 15)$$

$$d(w, x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5)$$

مثال

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	$m_0$ X	$m_1$ 1	$m_3$ 1	$m_2$ X
	01	$m_4$ 0	$m_5$ X	$m_7$ 1	$m_6$ 0
w	11	$m_{12}$ 0	$m_{13}$ 0	$m_{15}$ 1	$m_{14}$ 0
	10	$m_8$ 0	$m_9$ 0	$m_{11}$ 1	$m_{10}$ 0

(a)  $F = yz + w'x'$



## جداول کارنو

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(1, 3, 7, 11, 15)$$

$$d(w, x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5)$$

مثال

		y			
		00	01	11	10
wx	00	$m_0$ X	$m_1$ 1	$m_3$ 1	$m_2$ X
	01	$m_4$ 0	$m_5$ X	$m_7$ 1	$m_6$ 0
w	11	$m_{12}$ 0	$m_{13}$ 0	$m_{15}$ 1	$m_{14}$ 0
	10	$m_8$ 0	$m_9$ 0	$m_{11}$ 1	$m_{10}$ 0

yz

z

x

(b)  $F = yz + w'z$

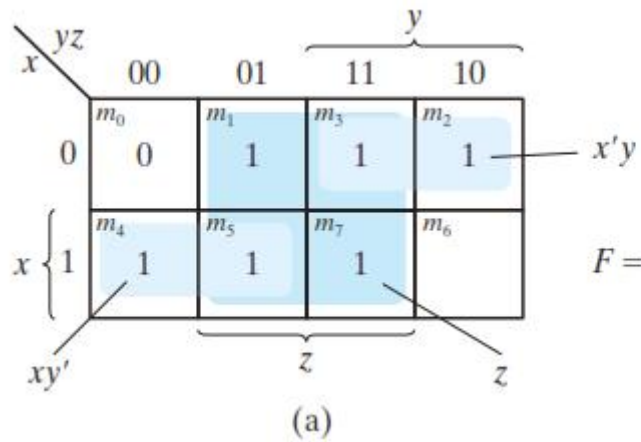




# جداول کارنو

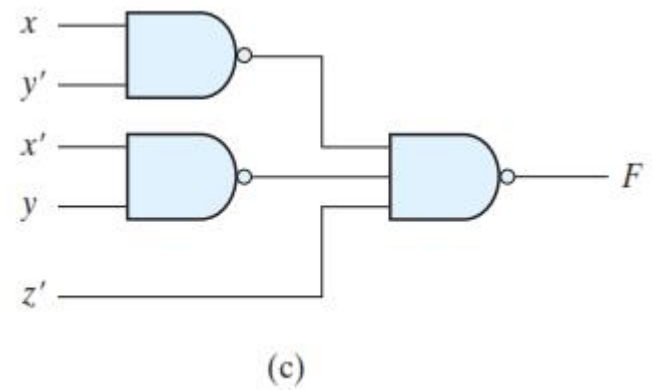
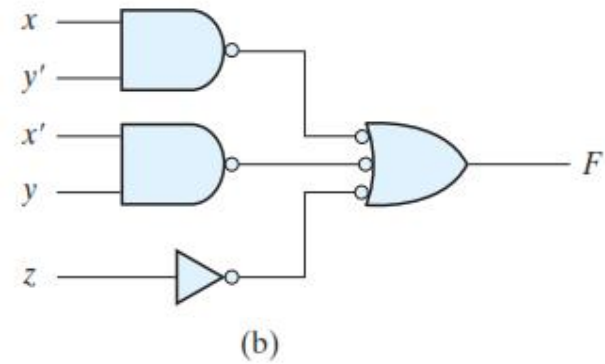
مثال  

$$F(x, y, z) = (1, 2, 3, 4, 5, 7)$$



$$F = xy' + x'y + z$$

$$F = xy' + x'y + z$$



## جداول کارنو

	B	0	1
A	0	0	1
1	1	0	

$$F = AB' + A'B$$

مثال

	B	0	1
A	0	0	1
1	1	1	1

$$F = AB + A'B + AB'$$

$$F = A + B$$

	BC	00	01	11	10
A	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

$$F = A + B'C + BC'$$

$$F = AB'C' + AB'C + ABC + ABC' + A'B'C + A'BC'$$

## جداول کارنو

مثال

		A	
	0	0	1
	0	0	1
C	0	0	1
		B	

$$G(A,B,C) = A$$

		A	
	1	0	0
	0	0	1
C	0	0	1
		B	

$$F(A,B,C) = \sum m(0,4,5,7)AC + B'C'$$

## جداول کارنو

A	B	Cin	S	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

مثال □

$$S = A'B'Cin + A'BCin' + A'BCin + ABCin$$

$$Cout = A'BCin + A B'Cin + ABCin' + ABCin$$

$$= A'BCin + ABCin + AB'Cin + ABCin + ABCin' + ABCin$$

$$= (A' + A)BCin + (B' + B)ACin + (Cin' + Cin)AB$$

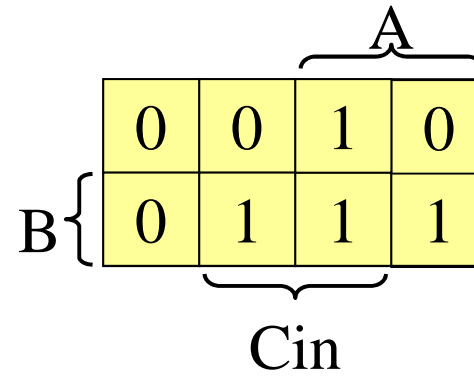
$$= 1 \cdot BCin + 1 \cdot ACin + 1 \cdot AB$$

$$= BCin + ACin + AB$$

# جداول کارنو

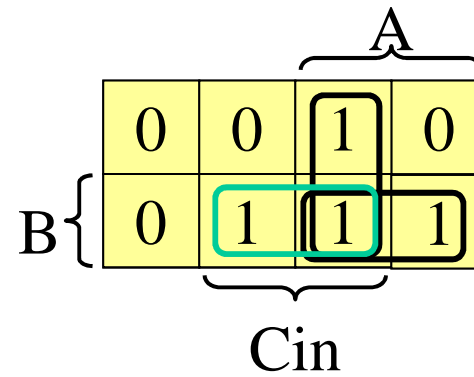
مثال

A	B	Cin	S	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



## جداول کارنو

A	B	Cin	S	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

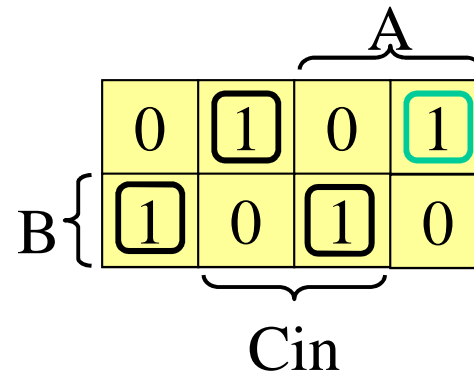


$$Cout = ACin + AB + BCin$$

## جداول کارنو

مثال

A	B	Cin	S	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



$$S = A'BCin' + A'B'Cin + ABCin + AB'Cin'$$

## جداول کارنو

		A		
	0	0	0	0
	1	0	0	0
C	1	1	0	1
	1	1	0	0
	B			

K-map for LT

		A		
	1	0	0	0
	0	1	0	0
	0	0	1	0
C	0	0	0	1
	B			

K-map for EQ

		A		
	0	1	1	1
	0	0	1	1
	0	0	0	0
C	0	0	1	0
	B			

K-map for GT

LT =  $A' B' D + A' C + B' C D$   
 EQ =  $A' B' C' D' + A' B C' D + A B C D + A B' C D'$   
 GT =  $B C' D' + A C' + A B D'$

مثال



## جداول کارنو

مثال

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	1
	01	1	1	0	1
	11	1	1	1	1
	10	1	0	1	1

$$F = A'BC' + A'CD' + ABC + AB'C'D' + ABC' + AB'C$$

$$F = BC' + CD' + AC + AD'$$

## جداول کارنو

•  $f(A,B,C,D) = \Sigma m(1,3,5,7,9) + d(6,12,13)$

مثال □

$A'D + C'D$

		$A$				
		00	01	11	10	
$C$	$D$	$AB$				
	$00$	0	0	X	0	
	$01$	1	1	X	1	
	$11$	1	1	0	0	
$10$	0	X	0	0		

$A$	$B$	$C$	$D$	$f$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	X
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

## جداول کارنو

مثال

$AB \backslash CD$		$CD$			
		00	01	11	10
00	00	0	1	0	0
	01	x	x	x	1
11	11	1	1	1	x
	10	x	0	1	1

$$F = A'C'D + B + AC$$

$AB \backslash CD$		$CD$			
		00	01	11	10
00	00	0	1	0	0
	01	x	x	x	1
11	11	1	1	1	x
	10	x	0	1	1

$$F = A'B'C'D + ABC' + BC + AC$$

# جداول کارنو

		A		
	0	X	1	0
	1	1	1	0
C	1	0	1	1
	0	0	1	1
	B			

مثال □

6 prime implicants:

$A'B'D, BC', AC, A'C'D, AB, B'CD$

essential

minimum cover:  $AC + BC' + A'B'D$

5 prime implicants:  
 $BD, ABC', ACD, A'BC, A'C'D$

essential

minimum cover: 4 essential implicants

		A		
	0	0	1	0
	1	1	1	0
C	0	1	1	1
	0	1	0	0
	B			

# جداول کارنو

مثال

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0		1		1
	1	1		1	

(a) Odd function  
 $F = A \oplus B \oplus C$

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	1		1	
	1		1		1

(a) Even function  
 $F = (A \oplus B \oplus C)'$

Fig. 3-33 Map for a Three-variable Exclusive-OR Function

# جداول کارنو

مثال

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	1	0	1	1
	01	0	1	1	1
	11	X	X	X	X
	10	1	1	X	X

$$F = y$$

## جداول کارنو

مثال

wx	yz			
	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

$$F = w$$

# جداول کارنو

مثال

wx	yz			
	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

$$F = \overline{xz}$$

wx	yz			
	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

$$F = xz$$



## جداول کارنو

مثال

wx	yz			
	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

$$F = y + w + \overline{\overline{xz}} + xz$$